

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ АЕРОКОСМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМ. М. Є. ЖУКОВСЬКОГО «ХАРКІВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ»

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Крайниченко Аліна Сергіївна

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК 539.3

(індекс)

**ДИСЕРТАЦІЯ**

Деякі задачі теорії пружності для багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл

(назва дисертації)

113 Прикладна математика

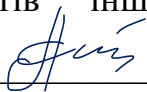
(шифр і назва спеціальності)

11 Математика і статистика

(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



А. С. Крайниченко

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник Ніколаєв Олексій Георгійович, доктор математичних наук,  
професор

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Харків – 2025

## АНОТАЦІЯ

*Крайниченко Аліна Сергіївна.* Деякі задачі теорії пружності для багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика і статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, 2025.

Дисертаційна робота направлена на вирішення актуальної наукової проблеми – математичного і комп'ютерного моделювання пружного стану багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл з неоднорідностями типу включень, порожнин, тріщин шляхом подальшого розвитку апарату узагальненого методу Фур'є. Метод дозволяє побудувати такі вектор-функції переміщень у розглянутих багатозв'язних трансверсально-ізотропних тілах, які точно задовольняють граничні умови на всіх їх поверхнях.

Об'єктом дослідження є напружено-деформований стан багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл складної просторової структури, що містять геометричні неоднорідності у вигляді порожнин, тріщин, систем тріщин або антитріщин, розміщених у різних конфігураціях.

Предметом дослідження є математичні моделі напруженого стану трансверсально-ізотропних тіл з тріщинами, порожнинами та включеннями певної форми, а також методи побудови, аналізу і комп'ютерної реалізації таких моделей.

У сучасному світі дедалі більше уваги приділяється створенню новітніх матеріалів із заданими фізико-механічними властивостями, що призвело до широкого застосування композитів та анізотропних матеріалів в різних галузях техніки — від авіаційної та космічної до біомедичних застосувань. Задачі пружності для тіл із тріщинами мають надзвичайно важливе значення для прогнозування та запобігання руйнуванню деталей, вузлів і конструкцій. У багатьох випадках наявність тріщин несе критичну загрозу для цілісності систем, і

моделювання їх впливу потребує ефективних і точних математичних методів. Вивчення трансверсально-ізотропних матеріалів із тріщинами, особливо у складних геометричних конфігураціях (наприклад, при наявності кількох тріщин або періодичних систем тріщин), досі залишається однією з найменш досліджених, але надзвичайно важливих проблем теорії пружності.

Математичні і комп'ютерні моделі, отримані в дисертації, базуються на крайових задачах для системи рівнянь рівноваги у переміщеннях трансверсально-ізотропних багатозв'язних тіл, обмежених координатними поверхнями стиснутих сфероїдальних систем координат. Основним методом побудови таких моделей для вказаних тіл є узагальнений метод Фур'є, який отримав подальшого розвитку в дисертаційній роботі. Для цього вперше строго було доведено базисність вісесиметричного набору векторних розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною. На основі вперше отриманих нижніх оцінок модулів визначників розв'язувальних систем першої та другої крайових задач для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною встановлено класи розв'язності цих задач звичайним методом Фур'є. Отримано нові теореми додавання для цих базисних розв'язків у стиснутих сфероїдальних системах координат, початки яких довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

За допомогою розвинутого математичного апарату вперше побудована математична параметрична модель напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі стиснутою сфероїдальною порожниною. Обидві поверхні можуть знаходитися під дією довільного вісесиметричного врівноваженого навантаження. Проведено комп'ютерний параметричний аналіз напружень у випадку, коли порожниною є тріщина.

Дослідженню задачу про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з двома паралельними круговими тріщинами. Комп'ютерний експеримент у задачі був спрямований на дослідження взаємного впливу двох

концентраторів напружень на локальний стан в околі тріщин, зокрема на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень на межах тріщин.

Вперше поставлено і розв'язано задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з різними конфігураціями періодичних систем (пакетів) плоских кругових тріщин і антитріщин. Проведено широке комп'ютерне моделювання, в якому розглядалися як періодичні, так і неперіодичні пакети тріщин і антитріщин різної конфігурації, а також окремі тріщини і антитріщини.

**Ключові слова:** математичне і комп'ютерне моделювання, математична модель, трансверсально-ізотропний простір, напружено-деформований стан, дві одноосні паралельні кругові тріщини, стиснуті сфероїдальні координати, узагальнений метод Фур'є, базисні розв'язки, рівняння рівноваги в переміщеннях, трансверсально-ізотропне тіло, розв'язувальна система, теореми додавання, коефіцієнт інтенсивності напружень, фредгольмів оператор, рівність Парсеваля, перша і друга крайові задачі теорії пружності, умови збіжності методу, оцінка модуля визначника розв'язувальної системи, періодичні системи (пакети) тріщин, представницький шар, постановка періодичної задачі, конфігурація пакету тріщин, взаємний вплив тріщин, практична збіжність методу, антитріщина, періодичні пакети антитріщин, функції Лежандра першого і другого роду, розподіл напружень в областях їх концентрації, метод редукції, точна аналітична модель, міцність, анізотропія, метод скінченних елементів.

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Ніколаєв О. Г., Крайниченко А. С. Пружний трансверсально-ізотропний простір з двома одновісними паралельними круговими тріщинами і супутні проблеми базисності // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2022, № 1. – С. 22-35. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11
2. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic crack system // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2024, № 1(38). – С. 229-247. DOI: 10.15421/4224118
3. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic anti-crack packages // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2024, № 2. – С. 53-62. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02.(7).06
4. Ніколаєв О.Г., Крайниченко А.С. Модель напруженого стану в трансверсально-ізотропному матеріалі з двома концентраторами напружень //Збірник тез доповідей за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «Наука, освіта, бізнес: сучасні виклики та сталий розвиток», Мукачєво, 30.03.2023 р. С. 81 – 82.
5. Nikolaev O.G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic crack systems // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 147 p
6. Ніколаєв О., Крайниченко А. Періодичні системи антитріщин у трансверсально-ізотропному просторі // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 87.

## ABSTRACT

Krainychenko Alina Sergiivna. Some problems of the theory of elasticity for multi-connected transversally isotropic bodies. - Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 11 – Mathematics and Statistics, specialty 113 Applied Mathematics. – National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, 2025.

The dissertation work is aimed at solving a topical scientific problem - mathematical and computer modeling of the elastic state of multi-connected transversely-isotropic bodies with inhomogeneities such as inclusions, cavities, cracks by further developing the apparatus of the generalized Fourier method. The method allows to construct such vector-functions of displacements in the considered multi-connected transversely-isotropic bodies that exactly satisfy the boundary conditions on all their surfaces.

The object of the study is the stress-strain state of multi-connected transversely-isotropic bodies of complex spatial structure, containing geometric inhomogeneities in the form of cavities, cracks, systems of cracks or anticracks, located in different configurations.

The subject of the study is mathematical models of the stress state of transversally-isotropic bodies with cracks, cavities and inclusions of a certain shape, as well as methods of construction, analysis and computer implementation of such models.

In the modern world, more and more attention is paid to the creation of new materials with specified physical and mechanical properties, which has led to the widespread use of composites and anisotropic materials in various branches of technology - from aviation and space to biomedical applications. Elasticity problems for cracked bodies are of paramount importance for predicting and preventing the destruction of parts, assemblies and structures. In many cases, the presence of cracks poses a critical threat to the integrity of systems, and modeling their impact requires effective and accurate mathematical methods. The study of transversely isotropic cracked materials, especially

in complex geometric configurations (for example, in the presence of several cracks or periodic crack systems), still remains one of the least studied, but extremely important problems of the theory of elasticity.

The mathematical and computer models obtained in the dissertation are based on boundary value problems for the system of equilibrium equations in the displacements of transversely isotropic multi-connected bodies bounded by the coordinate surfaces of compressed spheroidal coordinate systems. The main method for constructing such models for the specified bodies is the generalized Fourier method, which was further developed in the dissertation work. For this purpose, the basis of the axisymmetric set of vector solutions of the equilibrium equations in the displacements of a transversely isotropic compressed spheroid and a space with a compressed spheroidal cavity was first strictly proven. Based on the first obtained lower estimates of the moduli of the determinants of the solution systems of the first and second boundary value problems for a transversely isotropic compressed spheroid and a space with a compressed spheroidal cavity, the solvability classes of these problems were established by the usual Fourier method. New addition theorems for these basic solutions in compressed spheroidal coordinate systems, the origins of which are arbitrarily shifted along the symmetry axis, were obtained.

Using the developed mathematical apparatus, a mathematical parametric model of the stress-strain state of a transversely isotropic compressed spheroid with a compressed spheroidal cavity was first constructed. Both surfaces can be under the action of an arbitrary axisymmetric balanced load. A computer parametric analysis of stresses was performed in the case when the cavity is a crack.

The problem of the stress state of a transversely isotropic space with two parallel circular cracks was investigated. The computer experiment in the problem was aimed at studying the mutual influence of two stress concentrators on the local state in the vicinity of cracks, in particular on the values of the stress intensity coefficients at the crack boundaries.

For the first time, problems on the stress state of transversally isotropic space with various configurations of periodic systems (packages) of flat circular cracks and

anticracks were posed and solved. Extensive computer modeling was carried out, which considered both periodic and non-periodic packages of cracks and anticracks of various configurations, as well as individual cracks and anticracks.

**Keywords:** mathematical and computer modeling, mathematical model, transversely isotropic space, stress-strain state, two uniaxial parallel circular cracks, compressed spheroidal coordinates, generalized Fourier method, basis solutions, equilibrium equations in displacements, transversely isotropic body, solution system, addition theorems, stress intensity coefficient, Fredholm operator, Parseval equality, first and second boundary value problems of the theory of elasticity, convergence conditions of the method, estimation of the modulus of the determinant of the solution system, periodic systems (packages) of cracks, representative layer, formulation of a periodic problem, configuration of a package of cracks, mutual influence of cracks, practical convergence of the method, anticrack, periodic packages of anticracks, Legendre functions of the first and second kind, distribution of stresses in regions of their concentration, reduction method, exact analytical model, strength, anisotropy, finite element method.



## ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ .....	2
ABSTRACT .....	6
ВСТУП.....	11
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ТІЛ.....	18
Висновок до розділу .....	31
РОЗДІЛ 2 ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК АПАРАТУ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУРЕ .....	32
2.1 Частинні вісесиметричні розв'язки системи рівнянь рівноваги в переміщеннях для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда.....	32
2.2 Базисність побудованих розв'язків .....	40
2.3 Теореми додавання для вісесиметричних базисних стиснутих сфероїдальних розв'язків .....	59
2.4 Другі вісесиметричні крайові задачі для трансверсально-ізотропних стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною ...	64
Висновок до розділу .....	73
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СТИСНУТОГО СФЕРОЇДА ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ .....	75
3.1 Постановка задачі.....	75
3.2 Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи .....	76
3.3 Аналіз розв'язувальної системи .....	79
3.4 Задача про трансверсально-ізотропний стиснутий сфероїд з круговою тріщиною.....	82
Висновок до розділу .....	85
РОЗДІЛ 4 ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПРОСТІР З ДВОМА ОДНОВІСНИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ.....	87
4.1 Загальна постановка задачі .....	87

	10
4.2 Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи .....	88
4.3 Аналіз розв'язувальної системи .....	91
4.4 Чисельний експеримент .....	93
Висновок до розділу .....	97
РОЗДІЛ 5 ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТРІЩИН.....	98
5.1 Загальна постановка задачі .....	98
5.2 Побудова розв'язку задачі в загальній постановці .....	99
5.3 Розв'язання задач з періодичною системою тріщин.....	100
5.3.1 Конфігурація 1 .....	100
5.3.2 Конфігурація 2 .....	104
5.3.3 Конфігурація 3 .....	106
5.3.4 Конфігурації 4 та 5 .....	107
Висновок до розділу .....	110
РОЗДІЛ 6 ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ З ПЕРІОДИЧНИМИ ПАКЕТАМИ АНТИТРІЩИН.....	112
6.1 Загальна постановка задачі .....	112
6.2 Побудова розв'язку задачі в загальній постановці .....	113
6.3 Розв'язання задач з періодичною системою антитріщин.....	114
6.3.1 Конфігурація 1 .....	114
6.3.2 Конфігурація 2 .....	117
6.3.3 Конфігурація 3 .....	119
Висновок до розділу .....	121
ВИСНОВКИ.....	123
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	125

## ВСТУП

### **Актуальність теми дослідження.**

У сучасному світі дедалі більше уваги приділяється створенню новітніх матеріалів із заданими фізико-механічними властивостями, що призвело до широкого застосування композитів та анізотропних матеріалів в різних галузях техніки — від авіаційної та космічної до біомедичних застосувань. Особливої популярності набули трансверсально-ізотропні матеріали, властивості яких змінюються в одному напрямку, залишаючись незмінними в площині, перпендикулярній до цього напрямку. Такі матеріали ефективно імітують реальні інженерні системи, зокрема шаруваті композити та армовані структури. Водночас, на практиці в таких матеріалах можуть виникати тріщини, включення та інші дефекти, що значно ускладнює аналіз їх міцності та надійності.

Актуальність дослідження також зумовлена потребою у високоточному математичному моделюванні в практичних задачах механіки деформованого тіла з урахуванням реальних умов експлуатації. Зокрема, задачі пружності для тіл із тріщинами мають надзвичайно важливе значення для прогнозування та запобігання руйнуванню конструкцій. У багатьох випадках наявність тріщин несе критичну загрозу для цілісності систем, і моделювання їх впливу потребує ефективних і точних математичних методів. Вивчення трансверсально-ізотропних матеріалів із тріщинами, особливо у складних геометричних конфігураціях (наприклад, при наявності кількох тріщин або періодичних систем тріщин), досі залишається однією з найменш досліджених, але надзвичайно важливих проблем теорії пружності.

Крім того, математичне обґрунтування побудованих розв'язків, зокрема дослідження їх базисності, є ключовим етапом у забезпеченні як теоретичної строгості, так і практичної достовірності отриманих результатів. Сучасні обчислювальні технології дозволяють реалізувати чисельно складні аналітичні моделі, однак лише надійні математичні основи можуть забезпечити правильність результатів моделювання. Тому розвиток відповідного математичного апарату,

побудова точних розв'язків, а також чисельна верифікація — усе це формує комплексну дослідницьку програму, що має велике значення як для фундаментальної, так і прикладної науки.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота є частиною досліджень, в яких автор був виконавцем, і які проводилися на кафедрі вищої математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний університет» в 2021 – 2023 рр. за темою: «Розвиток та застосування математичних методів дослідження прикладних задач», номер держреєстрації № 0122U201064, і в 2024 р. за темою «Розвиток та застосування конструктивних математичних методів розв'язання прикладних задач» номер держреєстрації № 0124U001351 під керівництвом професора кафедри, доктора фізико-математичних наук, професора, заслуженого працівника освіти України, лауреата Державної премії України в галузі освіти Ніколаєва Олексія Георгійовича.

**Мета та задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток апарату узагальненого методу Фур'є (УМФ) на деякі класи задач теорії пружності для багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями стиснутих сфероїдальних систем координат, застосування цього апарату для побудови аналітичних або аналітико-чисельних моделей напруженого стану таких тіл, параметричний аналіз і чисельна реалізація отриманих моделей. Основними задачами дослідження є:

1. Доведення базесності системи вісесиметричних розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною.
2. Отримання нижніх оцінок модулів визначників розв'язувальних систем першої та другої крайових задач для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною, встановлення класів розв'язності цих задач звичайним методом Фур'є;

3. Отримання нових теорем додавання для вісесиметричних базисних розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях для трансверсально-ізотропних стиснутих сфероїдів, центри яких довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

4. Моделювання напруженого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі стиснутою сфероїдальною порожниною, на основі якого проведення параметричного аналізу напружень у випадку, коли порожниною є кругова тріщина.

5. Дослідження задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з двома паралельними круговими тріщинами.

6. Постановка та розв'язання задач про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з періодичними системами (пакетами) плоских кругових тріщин і антитріщин.

**Об'єкт дослідження** – напружено-деформований стан багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл складної просторової структури, що містять геометричні неоднорідності у вигляді тріщин, систем тріщин або антитріщин, розміщених у різних конфігураціях.

**Предмет дослідження** – математичні моделі напруженого стану трансверсально-ізотропних тіл з тріщинами, порожнинами та включеннями певної форми, а також методи побудови, аналізу і комп'ютерної реалізації таких моделей.

**Методи дослідження.** Основним методом у дисертаційній роботі є узагальнений метод Фур'є, математичний апарат якого отримав у роботі подальшого розвитку. При доведенні базисності розв'язків системи рівнянь у переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі сфероїдальною порожниною використано звичайний метод Фур'є. При отриманні нижніх оцінок модулів визначників розв'язувальних систем для першої та другої крайових задач в указаних вище областях використовувався метод спеціальних функцій. При доведенні фредгольмовості операторів розв'язувальних систем у розглянутих задачах використовувалися методи функціонального аналізу. Для чисельної реалізації запропонованих моделей застосовано метод редукції розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

**Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в наступному:**

У дисертаційній роботі отримано низку нових результатів, що мають теоретичне та прикладне значення для розвитку теорії пружності трансверсально-ізотропних тіл. Зокрема:

1. Отримав подальший розвиток апарат узагальненого методу Фур'є, що полягає у наступному: вперше доведено базисність системи вісесиметричних розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною.

2. На основі вперше отриманих нижніх оцінок модулів визначників розв'язувальних систем перших і других крайових задач для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною встановлено класи розв'язності цих задач звичайним методом Фур'є.

3. Отримано нові теореми додавання для вісесиметричних базисних стиснутих сфероїдальних розв'язків у випадку, коли початки систем координат довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

4. Вперше отримано параметричну модель напруженого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі стиснутою сфероїдальною порожниною, на базі якої проведено комп'ютерне моделювання напруженого стану стиснутого сфероїду з круговою тріщиною.

5. Вперше за допомогою узагальненого методу Фур'є досліджено напружений стан трансверсально-ізотропного простору з двома круговими тріщинами.

6. Вперше поставлено і розв'язано задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з різними конфігураціями періодичних систем (пакетів) плоских кругових тріщин і антітріщин.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційного дослідження мають значне практичне значення в контексті математичного моделювання пористих і композитних матеріалів, розрахунку міцності та інженерного аналізу елементів конструкцій з трансверсально-ізотропних матеріалів. Застосування отриманих аналітичних розв'язків дозволяє ефективно

описувати розподіл напружень у зонах їх найбільшої концентрації, що є критично важливим для оцінки надійності та довговічності матеріалів і виробів.

1. Отримані точні розв'язки можуть бути використані як еталонні при тестуванні та верифікації чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів та методу граничних елементів, у програмному забезпеченні для механіки деформівного твердого тіла.

2. Отримані моделі напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного простору з тріщинами можуть бути впроваджені в системи інженерного аналізу при розрахунках конструкцій з потенційними дефектами: авіаційних деталей, корпусів апаратів, елементів машин та будівельних структур.

3. Практичне використання коефіцієнтів інтенсивності напружень (K<sub>ІН</sub>), отриманих у роботі, пов'язано з тим, що певні критерії розвитку тріщин в теорії руйнування базуються на значеннях K<sub>ІН</sub> на межі тріщини.

4. Важливими є результати комп'ютерного моделювання в усіх розглянутих задачах, особливо дослідження взаємного впливу декількох концентраторів напружень один на одний.

Отже, результати дисертації можуть бути безпосередньо використані в інженерній практиці, в науково-дослідних установах і навчальному процесі при підготовці фахівців у галузях прикладної математики, механіки деформівного твердого тіла та комп'ютерного інженерного аналізу.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи доповідалися на конференціях:

- Міжнародна науково-практична конференція «Наука, освіта, бізнес: сучасні виклики та сталий розвиток», Мукачево, 30.03.2023 р.

Ніколаєв О.Г., Крайниченко А.С. Модель напруженого стану в трансверсально-ізотропному матеріалі з двома концентраторами напружень //Збірник тез доповідей за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «Наука, освіта, бізнес: сучасні виклики та сталий розвиток», Мукачево, 30.03.2023 р. С. 81 – 82.

- International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine:

Nikolaev O.G., Krainichenko A. S. Some problems for transversaly isotropic space with periodic crack systems // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 147 p

- 11-а Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». Львів, 2024:

Ніколаєв О., Крайниченко А. Періодичні системи антитріщин у трансверсально-ізотропному просторі // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 87.

[http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024\\_S0213.pdf](http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0213.pdf)

**Публікації.** Матеріали дисертації досить повно викладено у 6 наукових працях автора за темою дисертації, у тому числі: 3 статі в фахових наукових виданнях України (категорія Б), індексуються: ICI Journals Master List, Ulrich's Periodicals Directory (NewJersey, USA), Crossref, Google Scholar, Index Copernicus; 3 тези доповідей конференцій.

**Структура і об'єм дисертаційної роботи.** Дисертація містить вступ, шість розділи, висновки, список використаних джерел. Повний об'єм дисертації 137 сторінок, у тому числі 14 сторінок списку використаних джерел у кількості 143 найменувань.



## Список публікацій здобувача

### Статті:

1. Ніколаєв О. Г., Крайниченко А. С. Пружний трансверсально-ізотропний простір з двома одновісними паралельними круговими тріщинами і супутні проблеми базисності // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2022, № 1. – С. 22-35. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11

2. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic crack system // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2024, № 1(38). – С. 229-247. DOI: 10.15421/4224118

3. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic anti-crack packages // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2024, № 2. – С. 53-62. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02.(7).06

### Матеріали міжнародних конференцій:

1. Ніколаєв О. Г., Крайниченко А. С. Модель напруженого стану в трансверсально-ізотропному матеріалі з двома концентраторами напружень //Збірник тез доповідей за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «Наука, освіта, бізнес: сучасні виклики та сталий розвиток», Мукачєво, 30.03.2023 р. С. 81 – 82.

2. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic crack systems // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 147 p

3. Ніколаєв О., Крайниченко А. Періодичні системи антитріщин у трансверсально-ізотропному просторі // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 87.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

У галузі механіки матеріалів і теорії пружності, дослідження та аналіз поведінки трансверсально ізотропних тіл є важливою темою, яка знаходить широке застосування у великій кількості інженерних та технічних дисциплін. Дослідження та аналіз цієї теми є ключовим для розуміння та передбачення деформацій та напружень в таких матеріалах.

Дослідження плоских, тривимірних задач та задач у трансверсально ізотропних тілах мають значне значення в сучасній механіці деформованих тіл.

На початковому етапі розвитку в даній області ключові роботи належали Тімошенко С. П. і Гудієр Дж. Н. [1-3]. Вони заклали фундамент для багатьох розробок. Але деякі їх методики та припущення були обмежені класичними лінійними моделями, що могло не враховувати деякі нелінійні явища.

Трансверсальна ізотропія, яка є особливим випадком анізотропії, стала важливою для дослідників у середині XX століття. Роботи Амбарцумян С. А. [4-5] з'явилися серед перших, хто звернув увагу на особливості та динаміку деформацій у таких матеріалах. Але ці дослідження часто базувалися на лінійних моделях, які не завжди дозволяли отримати достовірний результат.

Подальший розвиток теорії забезпечили: Bower A. F. [6-8], який досліджував поведінку пластичних деформацій; Hashin Z. [9-11], який зосереджувався на пошкодженнях та їх впливі на макроскопічні властивості; Boresi A. P. та Schmidt R. J. [12-14] в дослідженні вискоеластичних матеріалів.

Важливим доповненням до досліджень в цій області стали роботи Kachanov M. [15-18] з механіки руйнування.

Saada A S., у своїй роботі [19], презентував широкий спектр аспектів теорії пружності, включаючи рішення для трансверсально ізотропних матеріалів, при цьому акцентуючи увагу на інтегральних методах. Chou P. C. і Pagano N. J. в [20]

розглядали різні методи теорії пружності для анізотропних матеріалів, в тому числі трансверсально ізотропних, зосереджуючись на матричних і тензорних методах.

Tsai S. W. в роботах [21-23] зосереджує своє дослідження на дизайн композитних матеріалів, де велика увага приділяється трансверсально ізотропним властивостям. Він використовує методи скінченних елементів для розрахунків.

В роботі [24] Heng Liu та Ernian Pan представили новий підхід для розв'язання змішаної крайової задачі між твердим циліндром із плоским кінцем і трансверсально-ізотропним шаруватим напівпростором. Він заснований на відповідному прямому розв'язанні кількох рівномірних вертикальних навантажень у поєднанні з методом суперпозиції за допомогою інтегрального підходу найменших квадратів.

Револьюційна робота A. A. Griffith, [25] опублікована у 1921 році, вперше сформулювала основні принципи механіки тріщин. Ця робота зумовила створення нового напрямку дослідження, але з плином часу деякі з її методів потребували уточнення. Irwin G. R. [26-29] у 1957 році розширив теорію Griffith A. A., введенням коефіцієнта інтенсивності напружень, що дозволило отримати глибше розуміння динаміки тріщин у матеріалах. Механіка тріщин стала ключовою областю вивчення після робіт Irwin G. R., який розробив концепцію інтенсивності напружень біля вершини тріщини. Його підхід ґрунтувався на лінійній еластичності, що обмежувало його застосування в ситуаціях з нелінійними матеріалами.

З появою нових матеріалів та збільшенням їх складності зростає потреба в дослідженні тріщин у трансверсально ізотропних матеріалах. Erdogan F. і Sih G. C. [30] у 1963 році представили одну з перших робіт, присвячених цій проблемі. Їх підхід був пізніше розвинений Delale F. та Erdogan F. [31-34] у 1983 році, які звернули увагу на тріщини в неоднорідних матеріалах.

Rice J. R. [35-39] представив інтегральний підхід до аналізу напружень та деформацій біля тріщин, що дозволило оцінювати тріщиностійкість матеріалів та конструкцій на новому рівні.

Barenblatt G. I. [40-43] активно використовував концепцію подібності для опису розподілу напружень у тріщині, яка дозволила йому отримати нові аналітичні розв'язки в механіці тріщин та зробити внесок у розуміння цієї важливої проблеми.

James W. Hutchinson є відомою фігурою в області механіки руйнування, і його внесок у вивчення тріщин є значущим. В одній з його відомих робіт, написаної спільно з J. R. Rice [44], вони представили новий інтеграл, який є шляхонезалежним. Ця робота була спрямована на аналіз концентрації деформації біля надрізів та тріщин. Наступна важлива робота [45] розглядає поведінку матеріалу в кінцевій частині тріщини, особливо в матеріалі, який зміцнюється. Додатково, в роботі [46] Hutchinson досліджує, як мікротріщини можуть впливати на поведінку тріщини. Тут він розглядає явище, коли маленькі тріщини в матеріалі відводять від себе напруження від більшої тріщини, що може вплинути на загальну міцність матеріалу. У роботі [47], досліджується, як геометрія та структура трансверсально ізотропних матеріалів може впливати на ріст тріщин. Особливо він зосереджується на тому, як різні режими деформації впливають на поведінку тріщин в шаруватих матеріалах.

Однією з основних робіт С. Г. Лехницький є [48]. У цій книзі він розглядає різноманітні проблеми пружності анізотропних пластин, зокрема проблеми, пов'язані з наявністю тріщин. Він пропонує математичні моделі для розрахунку полів напружень та деформацій навколо тріщин у таких пластинах. Особливу увагу приділяється випадкам, коли тріщина або інша неоднорідність розташована в пластині таким чином, що взаємодіє з краями або іншими неоднорідностями. Інші важливі роботи [49,50], досліджують загальні проблеми пружності для анізотропних тіл, включаючи трансверсально ізотропні.

George C. Sih працював у декількох ключових напрямках в галузі механіки руйнування і механіки тріщин. У роботах, таких як [51-54], він зосереджувався на вивченні росту тріщин, напруженій концентрації біля тріщин та механіці тріщин при різних умовах навантаження. Використовуючи теорію інтенсивності напружень і математичне моделювання, Sih розробляв моделі для прогнозування

росту тріщин і їх впливу на міцність матеріалів. Інший важливий напрям його досліджень стосувався анізотропних матеріалів. В роботах [55,56] Sih G. S. досліджував особливості анізотропних матеріалів і їх реакцію на навантаження, що призводить до росту тріщин. Зокрема, він використовував математичне моделювання та експериментальні методи для аналізу анізотропних матеріалів, їх відповіді на навантаження та руйнування.

John F. Knott активно застосовував різноманітні методи та техніки для аналізу тріщин та руйнування в матеріалах. Його роботи, такі як [57-59], відображають його поглиблений підхід до вивчення цього феномену.

Книга [60] написана Ted L. Anderson є однією з найбільш авторитетних у своїй галузі. В роботі вивчаються основні концепції та принципи механіки руйнування, такі як енергетичний підхід до руйнування, введення параметра інтенсивності напруження та ін.

Nairn J. A. в роботах [61-63] зосередив увагу на симуляції поперечного руйнування в композитах. Використовуючи модель когезивної зони, він дослідив динаміку тріщин в трансверсальному напрямку в матеріалах із вбудованими волокнами.

Робота [64] присвячена дослідженню плоскої задачі анізотропного матеріалу з тріщинами. Для отримання компонентів напруги використовується метод Фур'є.

В роботах [65-67] методом Фур'є розв'язуються задачі для трансверсально-ізотропного пружного напівпростору.

У працях Кривого О. Ф. [68–71] за допомогою методу інтегральних перетворень побудовано точне розв'язання задачі про кругову міжфазну тріщину в шаруватому трансверсально-ізотропному середовищі під дією довільного навантаження, прикладеного до її меж. Виведено аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень на межі тріщини, а також наведено числові значення цих коефіцієнтів для окремих поєднань трансверсально-ізотропних матеріалів.

Внесок Острика В. І. та Улітка А. Ф. у дослідження задач механіки руйнування та теорії пружності має значний вплив на розвиток методів аналізу

напружено-деформованого стану матеріалів із тріщинами [72-75]. Методи, які застосовують автори, включають використання інтегральних рівнянь, методу власних функцій і спеціальних функцій математичної фізики. Ці підходи дозволили їм отримати точні рішення задач для тріщин різної конфігурації та геометрії, а також врахувати взаємодію тріщин із контактними навантаженнями. Отримані результати, включаючи коефіцієнти інтенсивності напружень і функції розподілу напружень, є фундаментальними для розуміння поведінки матеріалів із дефектами.

У монографії [76] детально викладено розроблений автором метод власних векторних функцій, який є потужним інструментом для аналізу просторових задач теорії пружності. Цей метод дозволяє ефективно розв'язувати задачі з тріщинами, зокрема з тріщинами складної геометрії. Праця охоплює широкий спектр теоретичних і прикладних аспектів, включаючи розробку аналітичних рішень і їхню валідацію через чисельні експерименти.

У монографії Кіт Г. С [77] викладено методи розв'язання задач термопружності для тіл із тріщинами в умовах плоскої деформації. Основним інструментом є метод інтегральних рівнянь і спеціальних функцій, які використовуються для побудови аналітичних рішень. Автори дослідили вплив термічних полів на розподіл напружень у тілі з тріщинами, а також визначили коефіцієнти інтенсивності напружень для різних типів навантажень.

Робота [78] присвячена розв'язанню осесиметричних задач теплопровідності та термопружності для тіл із теплоактивними або теплоізованими включеннями, зокрема тріщинами. Автори застосували метод узагальнених інтегральних рівнянь для аналізу розподілу теплових і механічних полів. Основними результатами є формули для напружень у зоні дефектів і залежності температурних полів від геометрії та матеріальних властивостей включень і тріщин.

У статті [79] розглядаються задачі напруженого стану для тіл із циліндричними включеннями та тріщинами в умовах плоскої деформації. Автори використали методи математичної фізики, зокрема метод функцій Гріна, для побудови точних рішень. Увагу було зосереджено на впливі температурного поля на взаємодію включень і тріщин.

У роботі [80] розглянуто задачу напруженого стану неоднорідної пластини з тріщиною. Використовуючи методи математичної фізики та узагальнені підходи до інтегральних рівнянь, автори побудували аналітичний розв'язок задачі для пластини зі змінними механічними властивостями. Особливу увагу приділено впливу неоднорідності матеріалу на розподіл напружень у зоні тріщини.

Монографія [81] присвячена вивченню напружено-деформованого стану оболонок із дефектами, такими як тріщини чи пластичні зони. Автори детально дослідили пружні та пружно-пластичні задачі для циліндричних і сферичних оболонок, запропонувавши методику визначення залишкових напружень. У роботі використано чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, для аналізу деформацій у зонах дефектів.

У статті [82] розглядаються залишкові напруження, які виникають у циліндричній оболонці з тріщиною. Авторами запропоновано методику оцінки цих напружень, засновану на використанні аналітичних і чисельних методів. Особливу увагу приділено впливу геометрії тріщини та її орієнтації на величину залишкових напружень.

Монографії [83,84] присвячені дослідженню взаємодії жорстких включень і тріщин у пружних тілах. Авторами запропоновано моделі, які описують вплив включень на розподіл напружень у зоні тріщин. Особливу увагу приділено розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень і аналізу взаємодії дефектів різної конфігурації. Ця робота є важливим внеском у механіку руйнування, особливо у вивченні композитних матеріалів.

У статті [85] розглянуто задачу пружної рівноваги необмеженого тіла з тонким включенням. Автори застосували методи функцій комплексної змінної для побудови розв'язків задачі. Робота зосереджена на аналізі напружено-деформованого стану поблизу тонкого включення та дослідженні впливу механічних властивостей включення на розподіл напружень.

Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. в монографії [86] дослідили розподіл напружень у пластинах і оболонках із тріщинами. У роботі викладено

теоретичні основи аналізу напруженого стану, методи побудови аналітичних і чисельних рішень для задач із тріщинами, а також розглянуто прикладні аспекти.

Роботи Саврука М. П. мають фундаментальне значення для розвитку теорії тріщин і механіки руйнування.

Монографія [87] присвячена розробці чисельних методів для розв'язання плоских задач теорії тріщин. У роботі акцентується увага на методах побудови чисельних алгоритмів для визначення напруженого стану тіл із тріщинами. Особливе місце займає метод граничних елементів, який автори використовують для аналізу задач із довільною геометрією тріщин. Результати включають розрахунки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) і чисельні моделі, що дозволяють описувати поведінку матеріалів із тріщинами.

В роботі [88] розглядаються двовимірні задачі теорії пружності, зокрема задачі з тріщинами. Автор детально описує методи аналітичного і чисельного аналізу, зокрема використання методу функцій комплексної змінної для побудови розв'язків задач із тріщинами.

Монографія [89] є всеосяжним довідником, присвяченим визначенню коефіцієнтів інтенсивності напружень у задачах з тріщинами. У ній представлено великий обсяг даних щодо КІН для широкого спектру геометричних і фізико-механічних конфігурацій тіл із тріщинами.

Науковий доробок Г. Т. Сулима [90-97] охоплює фундаментальні дослідження в галузі механіки деформованого твердого тіла, механіки руйнування та теорії пружності. Особливу увагу в його роботах приділено задачам із тонкими включеннями, анізотропним матеріалам і композитам.

Монографія [98] містить систематизований виклад теорії пружної рівноваги тіл із тонкими включеннями. Автор узагальнив результати багаторічних досліджень, присвячених аналітичним і чисельним методам розв'язання задач теорії пружності для тіл із тонкими дефектами.

У статті [99] досліджено поведінку періодичного масиву тріщин у функціонально градієнтному неоднорідному середовищі, підданому нормальному та дотичному навантаженню в площині. Автор застосував аналітичний підхід,



базований на методі сингулярних інтегральних рівнянь, для аналізу напружено-деформованого стану навколо тріщин. У роботі розглядається вплив градієнта механічних властивостей матеріалу на коефіцієнти інтенсивності напружень і загальний розподіл напружень.

Монографія Божидарнік В. В., Максимович О. В. [100] присвячена дослідженню напружено-деформованого стану анізотропних пластинок із дефектами у вигляді отворів і тріщин. Автори запропонували аналітичні та чисельні методи для задач із тріщинами і отворами різної конфігурації.

У статті [101] досліджено задачу про періодичний масив жорстких лінійних включень в нескінченній пластині. Використовуючи метод сингулярних інтегральних рівнянь, автор побудував аналітичний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану пластини. Основна увага приділена впливу періодичності включень на розподіл напружень і деформацій.

Монографія [102] є всеосяжним дослідженням задач пружності з множинними тріщинами. У книзі викладено як теоретичні основи аналізу напруженого стану тіл із тріщинами, так і практичні аспекти, зокрема методи чисельного та аналітичного розв'язання таких задач.

В роботі [103], Raju S. та Newman Jr. J. розглядають рівняння для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщин в тривимірних тілах, які піддаються розтягувальним і згинальним навантаженням. Вони розглядають вплив розміру тріщини, її геометрії та орієнтації відносно напруження на коефіцієнт інтенсивності напружень. У своїй інших роботах [104-106], обидва вчені зосереджуються на скінченно-елементному аналізі тріщин в ізотропних та анізотропних пластинах. Це дослідження акцентує увагу на поведінці тріщин в матеріалах з різними напрямками властивостей. Також вони співпрацювали над роботою [107], де досліджували поверхневі тріщини. В цій роботі вони розробили емпіричне рівняння для коефіцієнта інтенсивності напружень на основі експериментальних даних.

У статті [108] задачі теорії тріщин, розташованих поблизу поверхонь масивних і тонкостінних тіл, розглядаються з використанням методу тонких

включень, запропонованого авторами. Проаналізовано вплив геометрії поверхонь та меж матеріалів на значення статичних і динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у зонах, прилеглих до дефектів.

У роботі [109] осесиметричну задачу про кругову підповерхневу тріщину радіального зсуву в напівнескінченному композиційному матеріалі з урахуванням початкових напружень розв'язано методом сингулярних інтегральних рівнянь. Побудовано систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень у зоні вершини тріщини з урахуванням початкового напруженого стану. Проведено чисельний аналіз для двох типів композиційних матеріалів: шаруватих композитів з ізотропними шарами та композитів зі стохастичним армуванням короткими еліпсоїдальними волокнами, досліджено вплив фізико-механічних властивостей і геометричних параметрів на значення КІН.

У дисертаційній роботі Davidson S. [110] для аналізу ряду мішаних задач теорії тріщин застосовано методи розділення змінних, інтегральні перетворення, а також техніки розв'язання подвійних і потрійних інтегральних рівнянь.

У роботі [111] плоску задачу теорії пружності для квазіізотропного середовища з криволінійними тріщинами проаналізовано з використанням методу сингулярних інтегральних рівнянь. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень для прямолінійної та параболічної тріщин довільного розміщення..

У статті [112] у рамках спрощеної лінійної моделі поверхневої пружності Гуртіна – Мердока досліджено особливості поведінки напружень і переміщень у безпосередній близькості до тріщини. Для розв'язання задачі застосовано апарат інтегральних перетворень Мелліна та Вінера–Гопфа.

У низці досліджень для аналізу напруженого стану поблизу тріщин застосовується апарат функцій Гріна. Зокрема, в статті [113] отримано функції Гріна у вигляді інтегралів від елементарних функцій для нескінченного тривимірного пружного середовища з круговою тріщиною. Розглядаються випадки як ізотропного матеріалу, так і трансверсально-ізотропного з тріщиною, розташованою паралельно площині ізоτροпії.

У роботі Fabrikant V. I. [114] побудовано інтегральні рівняння для задачі взаємодії паралельних кругових тріщин у трансверсально-ізотропному пружному середовищі під дією довільного навантаження, з використанням функцій Гріна. Для усунення сингулярностей, пов'язаних з вершинами тріщин, застосовано теорему про середнє значення інтеграла. У результаті отримані рівняння набули регулярної форми й були розв'язані чисельно. Наведено числові дані для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Складність побудови чисельно-аналітичних рішень для задач з тріщинами довільної орієнтації відносно осі анізотропії зумовила необхідність створення спрощених моделей для оцінки напруженого стану таких тіл. Зокрема, у роботі [115] запропоновано наближену аналітичну модель, яка оцінює внесок довільно орієнтованої кругової тріщини в ефективну пружну податливість трансверсально-ізотропного матеріалу. Вивчається застосування гіпотези, за якою зміна пружного потенціалу, спричинена такою тріщиною, може бути апроксимована відповідною зміною для еквівалентного ізотропного середовища.

У статті [116] основну увагу приділено визначенню ефективних пружних характеристик трансверсально-ізотропного матеріалу з множиною випадково орієнтованих кругових тріщин. Розроблено новий підхід до оцінювання впливу окремої довільно орієнтованої тріщини на загальні модулі пружності нескінченного трансверсально-ізотропного середовища. При цьому використано схему Морі – Танака – Бенвеніста, яка, для тріщиноподібних неоднорідностей, відповідає наближенню без взаємодії між включеннями.

Методом сингулярних інтегральних рівнянь в роботі [117] розв'язано двовимірну періодичну задачу теорії пружності для ізотропної площини з нескінченною кількістю криволінійних отворів, контури яких є початками крайових криволінійних тріщин.

У статті Zureick A.H. [118] досліджено асиметричні зміщення жорсткої сфероїдальної включення, вбудованої в трансверсально-ізотропне середовище, під впливом зсувних або обертових навантажень. Автор побудував аналітичне

розв'язання, що враховує анізотропію матриці, для точного опису напружено-деформованого стану навколо включення.

У статті Zhong Z. [119] аналітично досліджено напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного стрижня з циліндричною включенням, яка зазнає осесиметричних власних деформацій. Автор побудував точну модель на основі потенціальних функцій, яка дозволяє оцінити концентрацію напружень поблизу межі включення та матриці.

У статті [120] Кагадій Т. С. досліджує поведінку волокнистих композиційних матеріалів з наявністю тріщин, застосовуючи метод збурень. Вона розглядає вплив тріщин на напружено-деформований стан композиту, аналізуючи взаємодію між волокнами та матрицею. Метод збурень дозволяє отримати аналітичні вирази для оцінки концентрації напружень поблизу тріщини, що є важливим для прогнозування міцності та надійності таких матеріалів у практичних застосуваннях. У дослідженні [121] застосовано метод збурень для розв'язання контактних задач теорії пружності, що дозволяє враховувати складну геометрію області контакту та вплив неідеальних властивостей матеріалу. Цей підхід дозволяє отримати аналітичні рішення для оцінки напружено-деформованого стану в області контакту між штампом і пластинкою

У роботі Stashchuk M.G., Drobenko B.D., Izra Ye.M. [122] розроблено математичну модель для визначення оптимальних режимів відпалу функціонально-градієнтних тіл із урахуванням зміни властивостей матеріалу за об'ємом. Методом скінченних елементів розв'язували прямі задачі під час ітераційної побудови оптимального нагріву-охолодження тіл складної геометричної форми та будови. У статті Drobenko B.D., Kushnir R.M., Marchuk M.V. [123] розроблено метод дослідження міцності та визначення руйнівного навантаження для конструкцій ракетно-космічної техніки. Для вирішення поставленої задачі використано метод скінченних елементів.

У дослідженні [124] розглядається осесиметрична модель напруженого стану пластини, яка має круглий виріз, посилений круглою концентричною накладкою.

Автори побудували аналітичну модель та підтвердили її достовірність шляхом порівняння з чисельними розрахунками методом скінченних елементів.

У роботі [125] досліджено процес тріщиноутворення під впливом термоімпульсних навантажень на прикладі корпусного елемента авіаційного агрегату. Задачу термопружності для металу під час імпульсної теплової обробки було розв'язано за допомогою САЕ-системи Ansys. Визначено поля внутрішніх напружень та ідентифіковано області їх концентрації. Чисельне моделювання процесу зародження тріщин у зонах максимальної концентрації напружень дало змогу обчислити коефіцієнти інтенсивності напружень для режимів нормального відриву, поперечного і поздовжнього зсуву, а також значення  $J$ -інтегралу.

Одним з основних методів розв'язання крайових задач теорії пружності для багатозв'язних канонічних тіл є узагальнений метод Фур'є (УМФ). Вперше в загальному вигляді цей метод був запропонований О. Г. Ніколаєвим у дисертації [126], де було закладено всі його складові для ізотропних тіл з канонічними співвісними поверхнями і поверхнями з паралельними осями. У роботі [127] було побудовано частинні лінійно незалежні векторні розв'язки системи рівнянь рівноваги у переміщеннях для основних канонічних однозв'язних трансверсально-ізоотропних тіл і отримано теореми додавання цих розв'язків у випадку, коли центри різних поверхонь збігаються. Проблеми обґрунтування УМФ вперше було поставлено в роботах [128, 129]. У них було введено поняття базисної системи розв'язків рівняння Ламе в однозв'язній канонічній області та доведено базисність для всіх канонічних однозв'язних областей. Також було встановлено класи розв'язності методом Фур'є першої та другої крайових задач теорії пружності для вказаних областей. Перші підходи до обґрунтування методу Фур'є для вісесиметричних розв'язків системи рівнянь рівноваги у переміщеннях для трансверсально-ізоотропного витягнутого сфероїда було закладено у роботі [130]. Остаточні ці результати було отримано в статті [131]. Застосування узагальненого методу Фур'є для трансверсально-ізоотропних двозв'язних тіл, центри граничних поверхонь яких збігаються, розглядалися в роботах [130, 132 – 134].

У статті [135] розглянуто осесиметричну задачу про руйнування попередньо напруженого композитного матеріалу з періодичною системою паралельних співвісних тріщин нормального відриву. На основі подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та із застосуванням інтегральних перетворень Ганкеля задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь, а далі — до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

У роботі [136] виконано асимптотичний аналіз напруженого стану ізотропного матеріалу поблизу меж кругових тріщин, антитріщин і тонких включень за різних умов на поверхні. У локальній системі координат, прив'язаній до краю неоднорідності, побудовано асимптотичні розв'язки у вигляді розкладів за власними функціями, що залежать від кутових координат, та степеневих рядів за радіальною змінною. Отримано низку наближених формул для коефіцієнтів інтенсивності напружень, однак чисельні результати не наведено.

У статті [137] розглянуто задачу про жорсткий штамп довільної форми, який діє на межу трансверсально-ізотропного півпростору з довільною плоскою тріщиною або включенням, розташованими в площині, паралельній межі. Розглядаються загальні умови під штампом і на тріщині. Для отримання системи розв'язувальних рівнянь було використано два різні методи: узагальнений метод зображень і використання зворотної теореми. Подібну задачу було досліджено узагальненим методом Фур'є ще у роботі [130]. Метод теорії потенціалу застосовано в [138] для розв'язання задачі термопружності для ізотропного простору з антитріщиною під дією температурного поля. Сингулярні інтегральні рівняння для антитріщини довільної форми виведено в термінах невідомих стрибків напружень термічного зсуву. Подібним підходом у роботі [139] отримано аналітичний розв'язок тривимірної трансверсально-ізотропної термопружної задачі, в якій однорідний тепловий потік діє на простір з круговою антитріщиною.

## Висновок до розділу

У першому розділі дисертації проведено всебічний огляд сучасного стану досліджень задач теорії пружності для трансверсально-ізотропних тіл, з особливим акцентом на проблематику тріщин, включень та інших дефектів у таких матеріалах. Детально проаналізовано класичні та сучасні підходи до розв'язання задач з тріщинами, зокрема в трансверсально-ізотропних і композитних середовищах. Розглянуто аналітичні та чисельно-аналітичні методи, які використовуються для моделювання напружено-деформованого стану тіл із неоднорідностями, включаючи методи функцій Гріна, інтегральних перетворень, метод власних функцій, а також узагальнений метод Фур'є.

Аналіз літературних джерел показав актуальність подальших досліджень взаємодії тріщин та їх впливу на розподіл напружень у трансверсально-ізотропних тілах. Водночас виявлено недостатню вивченість задач із періодичними системами тріщин і антитріщин, а також нестачу строгих математичних обґрунтувань базисності побудованих розв'язків у канонічних тілах. Таким чином, обґрунтовано вибір теми дисертації та визначено напрями подальших досліджень, спрямованих на розвиток відповідного математичного апарату.

## РОЗДІЛ 2

### ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК АПАРАТУ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУРЕ

2.1 Частинні вісесиметричні розв'язки системи рівнянь рівноваги в переміщеннях для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда

Розглянемо систему рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного пружного тіла

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.1)$$

де

$$a_{1j} = a_{2j}, \quad a_{11} = a_{12} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad a_{13} = a_{31} = a_{32} = c_{44}, \quad b_{1j} = b_{2j},$$

$$b_{11} = b_{12} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}), \quad b_{13} = b_{31} = b_{32} = c_{13} + c_{44}, \quad a_{33} = c_{33}, \quad b_{33} = 0,$$

$c_{ij}$  – пружні сталі матеріалу тіла,  $(x_i)_{i=1}^3$  – декартові координати точки середовища,

$(V_i)_{i=1}^3$  – компоненти вектора переміщень  $\vec{V}$  у декартовому базисі.

Будемо вважати пружні сталі матеріалу тіла додатними. Вказана умова задовольняється у випадку основних трансверсально-ізотропних матеріалів.

Запишемо вісесиметричний варіант рівнянь (2.1). Для цього в системі рівнянь (2.1) перейдемо до циліндричних координат згідно з формулами

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi, \\ x_2 = \rho \sin \varphi, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in (-\infty, +\infty). \\ x_3 = z, \end{cases}$$

Позначимо компоненти вектора переміщень у вісесиметричному випадку в циліндричному базисі через  $V_\rho, V_z$ . Оскільки виконуються формули

$$V_1 = V_\rho \cos \varphi, \quad V_2 = V_\rho \sin \varphi, \quad V_3 = V_z, \quad (2.2)$$



$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.4)$$

причому  $V_\rho = V_\rho(\rho, z)$ ,  $V_z = V_z(\rho, z)$ , то можна записати

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (V_\rho \cos \varphi) = \left( \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} - \frac{V_\rho}{\rho^2} \right) \cos \varphi, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (V_\rho \sin \varphi) = \left( \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} - \frac{V_\rho}{\rho^2} \right) \sin \varphi, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \cos \varphi) + \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \sin \varphi) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} V_\rho + \sin^2 \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} V_\rho = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Підставляючи отримані формули в систему рівнянь (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \left( \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} - \frac{V_\rho}{\rho^2} \right) \cos \varphi + c_{44} \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2} \cos \varphi + \\ &\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} \right) + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = 0, \\ &\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \left( \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} - \frac{V_\rho}{\rho^2} \right) \sin \varphi + c_{44} \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2} \sin \varphi + \\ &\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} \right) + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = 0, \\ &c_{44} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} \right) = 0 \end{aligned}$$

або після спрощення

$$c_{11} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) \right) + c_{44} \frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho \partial z} = 0, \quad (2.8)$$

$$c_{44} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Частинні розв'язки рівнянь (2.8), (2.9) будемо шукати у вигляді

$$\vec{V}_s(\rho, z) = \vec{\nabla}_s \phi_s(\rho, z), \quad (2.10)$$

де

$$\vec{\nabla}_s = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k_s \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad s = 1, 2;$$

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$  – орти циліндричної системи координат,  $k_s$ ,  $\phi_s(\rho, z)$  – деякі сталі та функції, які будуть визначені далі. При  $s = 1, 2$  підставимо компоненти вектор-функції (2.10) в систему (2.8), (2.9)

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ c_{11} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho}) \right) + c_{44} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) k_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ c_{44} k_s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} \right) + c_{33} k_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} \right) \right] = 0.$$

Виберемо функції  $\phi_s(\rho, z)$  таким чином, щоб вони задовольняли системі рівнянь

$$c_{11} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho}) \right) + [c_{44} + (c_{13} + c_{44}) k_s] \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = 0, \quad (2.11)$$

$$[c_{44} k_s + (c_{13} + c_{44})] \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} \right) + c_{33} k_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = 0. \quad (2.12)$$

Умовою сумісності системи (2.11), (2.12) є виконання рівностей

$$\frac{c_{44} + (c_{13} + c_{44}) k_s}{c_{11}} = \frac{k_s c_{33}}{k_s c_{44} + c_{13} + c_{44}} = v_s, \quad (2.13)$$

звідки

$$k_s = \frac{c_{11} v_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{(c_{13} + c_{44}) v_s}{c_{33} - c_{44} v_s}. \quad (2.14)$$

Оскільки обидва дробі повинні бути однаковими, сталі  $v_s$  задовольняють рівнянню

$$c_{11}c_{44}v^2 - (c_{11}c_{33} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2)v + c_{33}c_{44} = 0. \quad (2.15)$$

Далі розглядається випадок дійсних і додатних коренів рівняння (2.15). Тоді потенціальні функції  $\phi_s(x)$  при  $s=1,2$  можна вибрати як розв'язки еліптичних диференціальних рівнянь

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} \right) \right) + v_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = 0, \quad s=1,2. \quad (2.16)$$

Таким чином, якщо  $v_1 \neq v_2$  і функції  $\phi_s(x)$  задовольняють рівнянням (2.16), то вектор функції (2.10) є лінійно незалежними розв'язками системи (2.8), (2.9).

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір  $\mathbb{R}^3$  зі стиснутою сфероїдальною порожниною, в якому фіксовано деяку декартову прямокутну систему координат  $(x, y, z)$ , так, що напрямок осі анізотропії середовища збігається з напрямком осі  $Oz$ . Центр порожнини знаходиться в точці  $O(x, y, z)$ , вісь симетрії сфероїда паралельна осі  $Oz$ , півосі сфероїда дорівнюють  $d_1, d_2$  ( $d_1 < d_2$ ).

З точкою  $O$  зв'яжемо однаково напрямлені з системою координат  $Oxyz$  дві декартові  $\{(x_s, y_s, z_s)\}_{s=1}^2$  і дві стиснуті сфероїдальні  $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$  системи координат, такі, що

$$x = x_s = c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s \sin \tilde{\eta}_s \cos \varphi, \quad y = y_s = c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s \sin \tilde{\eta}_s \sin \varphi, \quad \frac{z}{\sqrt{v_s}} = z_s = c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s \cos \tilde{\eta}_s. \quad (2.17)$$

Тут  $c_s > 0$  – параметр відповідної сфероїдальної системи,  $\tilde{\xi}_s \in [0, \infty)$ ,  $\tilde{\eta}_s \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , рівнянням поверхні сфероїдальної порожнини є  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^{(0)}$ , де

$$d_2 = c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s^{(0)}, \quad d_1 = \sqrt{v_s} c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s^{(0)}. \quad (2.18)$$

Зазначимо, що наведені вище потенціальні функції  $\phi_s$  у координатах  $(x_{js}, y_{js}, z_{js})$  є гармонічними функціями.

У роботі [127] побудовано повні набори розв'язків системи рівнянь (2.1), регулярні в зовнішності (внутрішності) стиснутого сфероїда. З них випливають вісесиметричні розв'язки системи рівнянь (2.8), (2.9) в областях  $\Omega^\pm = \{\tilde{\xi}_s > \tilde{\xi}_s^{(0)}\}$ ,  $s = 1, 2$

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) = \frac{-ic_s}{2n+1} \vec{\nabla}_s [u_{n-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) - u_{n+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)], \quad (2.19)$$

де

$$u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n(\text{ish}\tilde{\xi}) \\ P_n(\text{ish}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n(\cos \tilde{\eta}).$$

Тут і далі  $P_n^m(x)$ ,  $Q_n^m(x)$  – функції Лежандра першого і другого роду. Переміщення (2.19) у координатній формі мають такий вигляд:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) = u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_\rho - \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_z, \quad s = 1, 2; \quad (2.20)$$

де

$$u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \begin{Bmatrix} Q_n^1(\text{ish}\tilde{\xi}) \\ P_n^1(\text{ish}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^{-1}(\cos \tilde{\eta}).$$

Обчислимо напруження на поверхні  $\partial\Omega = \{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi) : \tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^{(0)}\}$ , які відповідають базисним розв'язкам  $\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)$ . Для цього запишемо закон Гука для трансверсально-ізотропного середовища:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11} \frac{\partial V_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial V_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad \sigma_y = c_{12} \frac{\partial V_x}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial V_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \sigma_z &= c_{13} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + c_{33} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} &= c_{44} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = c_{44} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Як відомо, компоненти вектора напружень на поверхні з одиничним вектором нормалі  $\vec{n}$  виражаються через компоненти тензора напружень за формулами

$$\begin{aligned}
F_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \quad F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\
F_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

де  $(n_x, n_y, n_z)$  – компоненти одиничного вектора нормалі  $\vec{n}$ .

Підставимо напруження (2.21) у формули (2.22). Тоді для першої компоненти одержимо:

$$\begin{aligned}
F_x &= n_x \left( c_{11} \frac{\partial V_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial V_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + n_y \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \\
&\quad + n_z c_{44} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

З формул (2.10), (2.16) випливають такі співвідношення між похідними компонент вектора переміщень:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad k \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad k \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{k}{v} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \tag{2.24}$$

З урахуванням формул (2.13), (2.24) перетворимо (2.23)

$$\begin{aligned}
F_x &= n_x \left( \left[ \frac{k}{v} (c_{13} + c_{44}) + \frac{c_{44}}{v} \right] \frac{\partial V_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial V_y}{\partial y} - c_{13} \frac{k}{v} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right) + \\
&\quad + n_y (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial V_x}{\partial y} + n_z c_{44} (k+1) \frac{\partial V_x}{\partial z} = c_{44} \frac{k+1}{v} \left( n_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + n_z v \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \\
&\quad + (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) \left( n_x \frac{\partial V_y}{\partial y} - n_y \frac{\partial V_x}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Аналогічно для інших компонент одержимо

$$\begin{aligned}
F_y &= c_{44} \frac{k+1}{v} \left( n_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + n_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + n_z v \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \\
&\quad + (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) \left( n_y \frac{\partial V_x}{\partial x} - n_x \frac{\partial V_x}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$F_z = c_{44} \frac{k+1}{k} \left( n_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + n_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + n_z v \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \tag{2.27}$$

Перейдемо у формулі (2.25) до циліндричних координат, враховуючи формули (2.2), (2.3) і співвідношення

$$n_x = n_\rho \cos \varphi - n_\varphi \sin \varphi, \quad n_y = n_\rho \sin \varphi + n_\varphi \cos \varphi, \quad (2.28)$$

де  $(n_\rho, n_\varphi, n_z)$  компоненти вектора  $\vec{n}$  у циліндричному базисі. Користуючись виразами похідних

$$\begin{aligned} n_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= (n_\rho \cos \varphi - n_\varphi \sin \varphi) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \cos \varphi) + \\ &+ (n_\rho \sin \varphi + n_\varphi \cos \varphi) \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \cos \varphi) = \\ &= n_\rho \cos \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + n_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - n_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho} V_\rho, \\ n_x \frac{\partial V_y}{\partial y} - n_y \frac{\partial V_y}{\partial x} &= (n_\rho \cos \varphi - n_\varphi \sin \varphi) \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \sin \varphi) - \\ &- (n_\rho \sin \varphi + n_\varphi \cos \varphi) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (V_\rho \sin \varphi) = \\ &= n_\rho \frac{\cos \varphi}{\rho} V_\rho + n_\rho \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - n_\varphi \sin \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

запишемо

$$\begin{aligned} F_x &= c_{44} \frac{k+1}{v} \left( n_\rho \cos \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + n_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - n_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho} V_\rho + n_z v \cos \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) + \\ &+ (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) \left( n_\rho \frac{\cos \varphi}{\rho} V_\rho + n_\rho \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - n_\varphi \sin \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} F_y &= c_{44} \frac{k+1}{v} \left( n_\rho \sin \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + n_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} + n_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} V_\rho + n_z v \sin \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) + \\ &+ (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) \left( n_\rho \frac{\sin \varphi}{\rho} V_\rho - n_\rho \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} + n_\varphi \cos \varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} \right), \\ F_z &= c_{44} \frac{k+1}{k} \left( n_\rho \frac{\partial V_z}{\partial \rho} + n_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + n_z v \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Оскільки

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} = 0,$$

то остаточно можна записати

$$F_\rho = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi = c_{44} \frac{k+1}{v} \left( n_\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + n_z v \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) + (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) n_\rho \frac{V_\rho}{\rho}, \quad (2.31)$$

$$F_z = c_{44} \frac{k+1}{k} \left( n_\rho \frac{\partial V_z}{\partial \rho} + n_z v \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \quad (2.32)$$

Запишемо компоненти  $(n_\rho, n_\varphi, n_z)$  одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні

$$\partial \Omega = \left\{ (\rho, \varphi, z) : \frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} = 1 \right\}. \quad (2.33)$$

В сфероїдальних координатах  $(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)$  рівняння поверхні задається так:  
 $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^{(0)}$ , причому  $c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s^{(0)} = d_2$ ,  $\sqrt{v_s} c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s^{(0)} = d_1$  і на поверхні  $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}$ . У подальшому всюди розглядається випадок  $\sqrt{v_s} d_2 > d_1$  ( $s=1,2$ ). Тоді

$$n_\rho = H^{-1} d_1 \sin \tilde{\eta}, \quad n_\varphi = 0, \quad n_z = H^{-1} d_2 \cos \tilde{\eta}, \quad (2.34)$$

де

$$H = \left( d_1^2 \sin^2 \tilde{\eta} + d_2^2 \cos^2 \tilde{\eta} \right)^{1/2}.$$

З формул (2.17) одержимо на поверхні  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^{(0)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_s} &= c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s^{(0)} \sin \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \rho} + \sqrt{v_s} c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s^{(0)} \cos \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{H n_\rho}{\sqrt{v_s}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \sqrt{v_s} H n_z \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= \frac{H}{\sqrt{v_s}} \left( n_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + n_z v_s \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Отже, формули (2.34), (2.35) дають можливість записати компоненти (2.31), (2.32) у вигляді ( $s=1,2$ ):

$$F_\rho = \frac{\sqrt{v}}{H} \left[ c_{44} \frac{k+1}{v} \frac{\partial V_\rho}{\partial \tilde{\xi}} + (c_{12} - c_{13} \frac{k}{v}) \text{th} \tilde{\xi} V_\rho \right], \quad (2.36)$$

$$F_z = c_{44} \frac{k_s+1}{k_s} \frac{\sqrt{v_s}}{H} \frac{\partial V_z}{\partial \tilde{\xi}_s}. \quad (2.37)$$

Тепер остаточно можна записати вектори напружень, які відповідають частинним розв'язкам (2.19) на поверхні  $\xi_{js} = \xi_{js}^{(0)}$  ( $s=1,2$ ) з компонентами нормалі (2.34):

$$F \vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s^{(0)}, \eta_s) = \frac{\sqrt{v_s}}{H} \left\{ c_{44} \frac{k_s+1}{v_s} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_s} u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_\rho - \sqrt{v_s} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_s} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_z \right] + \right. \\ \left. + (c_{12} - c_{13} \frac{k_s}{v_s}) \text{th} \tilde{\xi}_s^{(0)} u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_\rho \right\}. \quad (2.38)$$

## 2.2 Базисність побудованих розв'язків

У роботі [128] вперше сформульовано поняття базисності системи розв'язків рівняння Ламе в просторових канонічних областях і вирішено задачу базисності для всіх основних типів таких областей. Більш доступний виклад цих результатів наведено в статті [129]. За аналогією, у роботі [131] було введено поняття базисності системи розв'язків рівнянь (2.1) у вісесиметричній постановці, а також доведено базисність розв'язків для випадку трансверсально-ізотропного витягнутого сфероїда. У цьому дослідженні буде отримано аналогічні результати для стиснутого сфероїда.

**Означення 2.1.** Системи вектор-функцій  $\left\{ \vec{V}_{s,n}^{\pm}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right\}_{n=0,s=1}^{\infty,2}$  будемо називати базисними вісесиметричними системами розв'язків рівнянь (2.1) в областях  $\Omega^{\pm}$ , якщо:

- 1) вектор-функції  $\left\{ \vec{V}_{s,n}^{\pm}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right\}_{n=0,s=1}^{\infty,2}$  є регулярними лінійно незалежними розв'язками системи рівнянь (2.1) в областях  $\Omega^{\pm}$ ;



2) існує набір сталих  $\{a_{s,n}\}_{n=0,s=1}^{\infty,2}$  такий, що функція  $\vec{V} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn} \vec{V}_{s,n}^{\pm}(\xi_s, \tilde{\eta}_s)$

задовольняє умови:

$$\text{а) } \vec{V} \in C^2(\Omega^{\pm}) \cap C(\overline{\Omega^{\pm}}),$$

$$\text{б) } \vec{V}|_{\xi_j=\xi_{j0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \vec{e}_p + b_n P_n(\cos \tilde{\eta}) \vec{e}_z \right]. \quad (2.39)$$

**Теорема 2.1.** За умови  $v_1 \neq v_2$  вектор-функції

$$\{c_1^{-1} \vec{V}_{1,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) - c_2^{-1} \vec{V}_{2,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2), \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)\}_{n=1,s=1}^{\infty,2} \quad (2.40)$$

в області  $\Omega^+$  утворюють базисні вісесиметричні системи розв'язків рівнянь (2.8), (2.9). Крім того, для визначника розв'язувальної системи першої крайової задачі в області  $\Omega^+$  для рівнянь (2.8), (2.9) при  $n \geq 1$  виконується оцінка

$$|\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{|v_1 - v_2|}{2 \max(v_1, v_2)} \frac{d_1}{(n+1)d_2}, \quad (2.41)$$

де  $q_s = \text{ch} \tilde{\xi}_s^0$ ,  $\bar{q}_s = \text{sh} \tilde{\xi}_s^0$

**Доведення.** Позначимо граничну поверхню області  $\Omega^+$  як поверхню сфероїда  $\frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} = 1$ , причому  $d_1 / d_2 < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}\}$ . Для її описання зручно користуватися двома стиснутими системами сфероїдальних координат  $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$  (2.17). Тоді рівняння поверхні  $\partial\Omega$  задається рівнянням  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$ , де  $c_s \text{ch} \tilde{\xi}_s^0 = d_2$ ,  $\sqrt{v_s} c_s \text{sh} \tilde{\xi}_s^0 = d_1$ , звідки отримаємо таке співвідношення:

$$c_s = \sqrt{d_2^2 - \frac{d_1^2}{v_s}}. \quad (2.42)$$

Для обґрунтування базисності зовнішніх розв'язків (2.19) розглянемо при  $n \geq 1$  визначник

$$\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) = \begin{vmatrix} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \\ -\frac{k_1}{\sqrt{v_1}} Q_n(i\bar{q}_1) & -\frac{k_2}{\sqrt{v_2}} Q_n(i\bar{q}_2) \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Покажемо, що цей визначник не дорівнює нулю, та отримаємо нижню оцінку його модуля. Представимо визначник у наступному вигляді:

$$\Delta_n^{+(1)6} = Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[ \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right]. \quad (2.44)$$

Враховуючи, що  $k_s = \frac{c_{11}v_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}$ , визначник  $\Delta_n^{+(1)6}$  можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{+(1)6} &= Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{c_{11}v_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{c_{11}v_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] = \\ &= Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \left( \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left( \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для подальшого аналізу розглянемо функцію

$$\tau(v) = \sqrt{v} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}, \quad (2.46)$$

де

$$\bar{q} = \text{sh} \tilde{\xi}^0 = \frac{d_1}{\sqrt{v d_2^2 - d_1^2}}.$$

Покажемо, що вона монотонно спадає на півосі  $\mathbb{R}_+$ . Обчислемо похідну цієї функції

$$\frac{d\tau(v)}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} + i\sqrt{v} \frac{\frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz}}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \frac{d\bar{q}}{dv}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\bar{q}}{dv} = -\frac{1}{2v} \bar{q} q^2, \quad (2.47)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(v)}{dv} &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - i\bar{q} q^2 \left[ \frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz} \right] \right\} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q} q [Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + \right. \\ &\quad \left. + n(n+1) \bar{q} q [Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Розглянемо вираз

$$J_n = -\bar{q} q [Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + n(n+1) \bar{q} q [Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}). \quad (2.49)$$

Його можна перетворити за допомогою рекурентних формул для функцій Лежандра другого роду:

$$\begin{aligned} J_n &= -\bar{q} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) [-i(n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) - (n+1) \bar{q} Q_n(i\bar{q})] + n(n+1) \bar{q} q [Q_n(i\bar{q})]^2 - \\ &\quad - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) = i\bar{q} (n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + (n+1) (\bar{q})^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \\ &\quad + n(n+1) \bar{q} q [Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) = i\bar{q} (n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \\ &\quad + n(\bar{q})^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + n(n+1) \bar{q} q [Q_n(i\bar{q})]^2 = i\bar{q} (n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \\ &\quad + n\bar{q} Q_n(i\bar{q}) [\bar{q} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + (n+1) q Q_n(i\bar{q})] = \\ &= i\bar{q} (n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - in\bar{q} Q_n(i\bar{q}) Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Останній вираз може бути переписаний з урахуванням інтегральної форми функції Лежандра другого роду.

$$Q_n^{(m)}(z) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(mt)}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \text{cht})^{n+1}} dt. \quad (2.51)$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} i\bar{q} (n+1) Q_{n+1}(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - in\bar{q} Q_n(i\bar{q}) Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) &= \\ = -\frac{\bar{q} q n(n+1)}{2i^{2n+2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\text{cht} - \text{chs})^2}{(\bar{q} + q \text{cht})^{n+2} (\bar{q} + q \text{chs})^{n+2}} dt ds, \end{aligned} \quad (2.52)$$

звідки випливає подання

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(v)}{dv} &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} - \frac{\bar{q}qn(n+1)}{4\sqrt{v}i^{2n+2}[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(cht - chs)^2}{(\bar{q} + qcht)^{n+2}(\bar{q} + qchs)^{n+2}} dt ds = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} - \frac{\bar{q}qn(n+1)}{4\sqrt{v}|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(cht - chs)^2}{(\bar{q} + qcht)^{n+2}(\bar{q} + qchs)^{n+2}} dt ds. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Формула (2.53) доводить від'ємність похідної  $\frac{d\tau(v)}{dv}$ . Отже, показано, що введена

функція  $\tau(v)$  монотонно спадає на півосі  $\mathbb{R}_+$ . Крім того, виконується нерівність

$$\left| \frac{d\tau(v)}{dv} \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{|Q_n(i\bar{q})|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|}. \quad (2.54)$$

Покажемо, що дана функція  $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$  є монотонно зростаючою на

додатній півосі  $\mathbb{R}_+$ . Для цього знайдемо її похідну. Аналогічно до попередніх обчислень, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(v)}{dv} &= -\frac{1}{2\sqrt{v}^3} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} + \frac{i}{\sqrt{v}} \frac{\frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz}}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \frac{d\bar{q}}{dv} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{v}^3} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q [Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \right. \\ &\quad \left. -n(n+1)\bar{q}q [Q_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Перетворимо вираз у фігурних дужках, використовуючи рекурентні співвідношення для функцій Лежандра другого роду:

$$\begin{aligned} Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q [Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n(n+1)\bar{q}q [Q_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) &= \\ = \bar{q}q [Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n(n+1)\bar{q}q [Q_n(i\bar{q})]^2 + q^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) &= \\ = \bar{q} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) [-i(n+1)Q_{n+1}(i\bar{q}) - (n+1)\bar{q}Q_n(i\bar{q})] - n(n+1)\bar{q}q [Q_n(i\bar{q})]^2 + \\ + q^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) &= -i\bar{q}(n+1)Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q}) - (n+1)(\bar{q})^2 Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_n(i\bar{q}) - \\ - n(n+1)\bar{q}q [Q_n(i\bar{q})]^2 + q^2 Q_n(i\bar{q}) Q_n^{(1)}(i\bar{q}) &= -i\bar{q}(n+1)Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+1)\bar{q}Q_n(i\bar{q})[\bar{q}Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + nqQ_n(i\bar{q})] + q^2Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) = \\
& = -i\bar{q}(n+1)Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q}) + i(n+1)\bar{q}Q_n(i\bar{q})Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) + (n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 + \\
& + q^2Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) = (n+1)\left\{i\bar{q}[Q_n(i\bar{q})Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q})] - \right. \\
& \left. -iqQ_n(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q})\right\}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Окремо перетворимо вираз:

$$\begin{aligned}
& i\bar{q}[Q_n(i\bar{q})Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q})] = i\bar{q}\left\{Q_n(i\bar{q})[i\bar{q}Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + i(n+1)qQ_n(i\bar{q})] - \right. \\
& \left. - Q_n^{(1)}(i\bar{q})\left[i\bar{q}Q_n(i\bar{q}) + \frac{iq}{n+1}Q_n^{(1)}(i\bar{q})\right]\right\} = i^2\bar{q}q(n+1)\left\{[Q_n(i\bar{q})]^2 - \frac{1}{(n+1)^2}[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2\right\} = \\
& = -\frac{\bar{q}q(n+1)}{i^{2n+2}}\left[i^{n+1}Q_n(i\bar{q}) - \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}(i\bar{q})\right]\left[i^{n+1}Q_n(i\bar{q}) + \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}(i\bar{q})\right]. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Останній множник у формулі (2.57) можна записати так:

$$\begin{aligned}
& i^{n+1}qQ_n(i\bar{q}) + \frac{1}{n+1}i^{n+1}qQ_n^{(1)}(i\bar{q}) = i^{n+1}qQ_n(i\bar{q}) + i^n[Q_{n+1}(i\bar{q}) - i\bar{q}Q_n(i\bar{q})] = \\
& = i^{n+1}(q - \bar{q})Q_n(i\bar{q}) - i^{n+2}Q_{n+1}(i\bar{q}). \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Представимо останній вираз за допомогою інтегрального подання (2.51):

$$\begin{aligned}
& i^{n+1}(q - \bar{q})Q_n(i\bar{q}) - i^{n+2}Q_{n+1}(i\bar{q}) = \int_0^\infty \frac{q - \bar{q}}{(\bar{q} + qcht)^{n+1}} dt - \int_0^\infty \frac{1}{(\bar{q} + qcht)^{n+2}} dt = \\
& = \int_0^\infty \frac{(q - \bar{q})(\bar{q} + qcht) - 1}{(\bar{q} + qcht)^{n+2}} dt = \int_0^\infty \frac{q(q - \bar{q})(cht - 1)}{(\bar{q} + qcht)^{n+2}} dt. \tag{2.59}
\end{aligned}$$

Остаточно похідна  $\frac{d\sigma(v)}{dv}$  має вигляд

$$\frac{d\sigma(v)}{dv} = \frac{n+1}{2\sqrt{v^3}}.$$

$$\cdot \left\{ \frac{\bar{q}q(n+1)}{i^{2n+2}[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left[ i^{n+1}Q_n(i\bar{q}) - \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right] \left[ i^{n+1}Q_n(i\bar{q}) + \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{iqQ_n(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q})}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \right\}. \quad (2.60)$$

Оскільки з подання (2.59) випливає, що другий множник у квадратних дужках формули (2.60) є додатним, то виконується умова

$$\frac{d\sigma(v)}{dv} > 0 \quad v \in \mathbb{R}_+,$$

тобто сама функція  $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$  монотонно зростає на півосі  $\mathbb{R}_+$ .

Враховуючи встановлені властивості монотонності відповідних функцій, можна зробити висновок, що обидва доданки у формулі (2.45) мають однаковий знак. Отже, маємо:

$$|\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \left| \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right|. \quad (2.61)$$

Скористаємося формулою Лагранжа для запису модуля останнього множника у формулі (2.61):

$$\left| \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right| = \left| \frac{d\tau}{dv}(\mu) \right| |v_1 - v_2|,$$

де  $\mu$  розташовано між  $v_1$  і  $v_2$ . Тоді оцінка (2.54) сумісно з нерівністю

$$\frac{d_1}{\sqrt{v}(n+1)d_2} = \frac{\bar{q}}{(n+1)q} < \frac{|Q_n(i\bar{q})|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|} < \frac{q}{(n+1)\bar{q}} = \frac{\sqrt{v}d_2}{(n+1)d_1}, \quad \bar{q} > 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.62)$$

дає при  $n \geq 1$

$$|\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{|v_1 - v_2|}{2\max(v_1, v_2)} \frac{d_1}{(n+1)d_2}. \quad (2.63)$$

Тепер розглянемо вектор-функції  $\{\vec{V}_{s,0}^{+(6)}(\xi_s, \eta_s)\}_{s=1}^2$  з набору (2.19). Вони не є регулярними в області  $\Omega^+$ , тому замість них вибирається їх лінійна комбінація

$$c_1^{-1}\vec{V}_{1,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) - c_2^{-1}\vec{V}_{2,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2), \quad (2.64)$$

яка вже регулярна в указаній області. Для остаточного встановлення лінійної незалежності всіх функцій системи, наведеної в формулюванні теореми, достатньо

довести, що  $z$  – компонента вектор-функції (2.64) не перетворюються на нуль ні при яких значеннях параметрів. Вона має вигляд

$$\frac{k_2}{c_2\sqrt{v_2}}Q_0(i\bar{q}_2) - \frac{k_1}{c_1\sqrt{v_1}}Q_0(i\bar{q}_1). \quad (2.65)$$

Розглянемо функцію

$$\theta(v) = \frac{k}{c\sqrt{v}}Q_0(i\bar{q}). \quad (2.66)$$

Знайдемо похідну цієї функції, враховуючи формули (2.13), (2.18), (2.42), (2.47)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(v)}{dv} &= \frac{1}{d_1} \frac{d}{dv} \left[ \frac{c_{11}v - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \bar{q}Q_0(i\bar{q}) \right] = \\ &= \frac{1}{d_1} \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \bar{q}Q_0(i\bar{q}) + \frac{c_{11}v - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left[ -\frac{1}{2v} \bar{q}q^2Q_0(i\bar{q}) - \frac{1}{2v} (\bar{q})^2 qQ_0^{(1)}(i\bar{q}) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{d_1} \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \bar{q}Q_0(i\bar{q}) - \frac{1}{2v} \frac{c_{11}v - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \bar{q}q \left[ qQ_0(i\bar{q}) + \bar{q}Q_0^{(1)}(i\bar{q}) \right] \right\}. \quad (2.67) \end{aligned}$$

Перетворимо останній вираз за допомогою рекурентних формул для функцій Лежандра другого роду

$$qQ_0(i\bar{q}) + \bar{q}Q_0^{(1)}(i\bar{q}) = -iQ_1^{(1)}(i\bar{q}), \quad Q_0(i\bar{q}) + iqQ_0^{(1)}(i\bar{q}) = i\bar{q}Q_1(i\bar{q}).$$

В результаті

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(v)}{dv} &= \frac{1}{d_1} \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \bar{q}Q_0(i\bar{q}) + \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}q}{2} iQ_1^{(1)}(i\bar{q}) - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}q}{2v} iQ_1^{(1)}(i\bar{q}) \right\} = \\ &= \frac{1}{id_1} \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}}{2} \left[ 2iQ_0(i\bar{q}) + qi^2Q_1^{(1)}(i\bar{q}) \right] - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}q}{2v} i^2Q_1^{(1)}(i\bar{q}) \right\} = \\ &= \frac{1}{id_1} \left\{ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}}{2} \left[ iQ_0(i\bar{q}) + i^2\bar{q}Q_1(i\bar{q}) \right] - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{\bar{q}q}{2v} i^2Q_1^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \quad (2.68) \end{aligned}$$

З інтегрального подання (2.51) випливає

$$iQ_0(i\bar{q}) + i^2\bar{q}Q_1(i\bar{q}) = \int_0^\infty \frac{2\bar{q} + cht}{(\bar{q} + qcht)^2} dt,$$

що вираз у квадратних дужках правої частини формули (2.68) є додатним. Так само

і останній доданок у фігурних дужках є додатним. Тоді функція  $i\theta(v)$  монотонно зростає на півосі  $\mathbb{R}_+$ . Це означає, що вираз (2.65) не перетворюється на нуль. Більш того, можемо оцінити

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\theta(v)}{dv} \right| &\geq \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{1}{d_1} \frac{\bar{q}}{2} \int_0^\infty \frac{2\bar{q} + cht}{(\bar{q} + qcht)^2} dt \geq \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{(\bar{q})^2}{d_1} \int_0^\infty \frac{dt}{(\bar{q} + qcht)^2} \geq \\ &\geq \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{(\bar{q})^2}{q^2 d_1} \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + cht)^2} = \frac{1}{3} \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{(\bar{q})^2}{q^2 d_1} = \frac{1}{3} \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{vd_2^2}. \end{aligned}$$

Тепер остаточно можна оцінити

$$\left| \frac{k_2}{c_2 \sqrt{v_2}} Q_0(i\bar{q}_2) - \frac{k_1}{c_1 \sqrt{v_1}} Q_0(i\bar{q}_1) \right| \geq \frac{1}{3} \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2^2} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1, v_2)}. \quad (2.69)$$

На підставі оцінок (2.63), (2.69) можна стверджувати про виконання першої умови базисності для вказаних вектор-функцій  $\{\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\xi_s, \eta_s)\}_{n=1, s=1}^{\infty, 2}$ .

Перевіримо другу умову базисності. Розглянемо першу крайову задачу для системи рівнянь (2.8), (2.9) в області  $\Omega^+$  з граничною умовою (2.39). Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\vec{V} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s), \quad (2.70)$$

де  $a_{s,n}$  невідомі коефіцієнти. Переходячи до координатного вигляду (2.20) переміщень  $\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\xi_s, \eta_s)$  і задовольняючи граничні умови (2.39), для визначення коефіцієнтів  $a_{s,n}$  отримаємо алгебраїчну систему

$$c_1 a_{1,n} + c_2 a_{2,n} = 0, \quad \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} Q_0(i\bar{q}_1) a_{1,0} + \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} Q_0(i\bar{q}_2) a_{2,0} = -b_0; \quad (2.71)$$

$$Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) a_{1,n} + Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) a_{2,n} = -n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (2.72)$$

$$-\frac{k_1}{\sqrt{v_1}} Q_n(i\bar{q}_1) a_{1,n} - \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} Q_n(i\bar{q}_2) a_{2,n} = b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.73)$$

Визначниками систем (2.71) і (2.72), (2.73) є вирази (2.65) і (2.43) відповідно. Оскільки вони відмінні від нуля, то система (2.71) – (2.73) має єдиний розв'язок



$$a_{1,0} = \frac{b_0}{c_1} \left[ \frac{k_2}{c_2 \sqrt{v_2}} Q_0(i\bar{q}_2) - \frac{k_1}{c_1 \sqrt{v_1}} Q_0(i\bar{q}_1) \right]^{-1}, \quad (2.74)$$

$$a_{2,0} = -\frac{b_0}{c_2} \left[ \frac{k_2}{c_2 \sqrt{v_2}} Q_0(i\bar{q}_2) - \frac{k_1}{c_1 \sqrt{v_1}} Q_0(i\bar{q}_1) \right]^{-1}, \quad (2.75)$$

$$a_{1,n} = \frac{\frac{k_2}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_2) b_n^{(1)} - Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) b_n}{\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)}, \quad n \geq 1; \quad (2.76)$$

$$a_{2,n} = \frac{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) b_n - \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) b_n^{(1)}}{\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)}, \quad n \geq 1. \quad (2.77)$$

З отриманих розв'язків і формул (2.62), (2.63) випливають такі оцінки:

$$\begin{aligned} |a_{1,n}| &\leq \frac{\frac{|k_2|}{\sqrt{v_2}} n(n+1) |Q_n(i\bar{q}_2)| |b_n^{(1)}| + |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| |b_n|}{|\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)|} \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{2 \max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{(n+1)d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left[ \frac{|k_2|}{\sqrt{v_2}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_2)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} |b_n^{(1)}| + |b_n| \right] \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{2 \max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{(n+1)d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left[ \frac{|k_2| d_2}{d_1} n |b_n^{(1)}| + |b_n| \right], \quad (2.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_{2,n}| &\leq \frac{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)| |b_n| + \frac{|k_1|}{\sqrt{v_1}} n(n+1) |Q_n(i\bar{q}_1)| |b_n^{(1)}|}{|\Delta_n^{+(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)|} \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{2 \max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{(n+1)d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left[ \frac{|k_1|}{\sqrt{v_1}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_1)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} |b_n^{(1)}| + |b_n| \right] \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{2 \max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{(n+1)d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left[ \frac{|k_1| d_2}{d_1} n |b_n^{(1)}| + |b_n| \right]. \quad (2.79) \end{aligned}$$

Тепер сформулюємо умови існування розв'язку крайової задачі (2.8), (2.9), (2.39) в області  $\Omega^+$  у вигляді (2.70). Для цього оцінимо члени ряду (2.70) за допомогою отриманих вище результатів. Перш за все, зазначимо, що з інтегрального подання (2.51) випливає така нерівність:

$$\begin{aligned}
|Q_n^{(m)}(ish\tilde{\xi})| &= \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(mt)}{(\text{sh}\tilde{\xi} + \text{ch}\tilde{\xi}\text{cht})^{n+1}} dt = \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \frac{1}{(\text{ch}\tilde{\xi})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(mt)}{(\text{sh}\tilde{\xi} / \text{ch}\tilde{\xi} + \text{cht})^{n+1}} dt \leq \frac{n!}{(n-m)!} \frac{1}{(\text{ch}\tilde{\xi})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(mt)}{(\bar{q} / q + \text{cht})^{n+1}} dt = \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \frac{q^{n+1}}{(\text{ch}\tilde{\xi})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(mt)}{(\bar{q} + q\text{cht})^{n+1}} dt = \frac{q^{n+1}}{(\text{ch}\tilde{\xi})^{n+1}} |Q_n^{(m)}(i\bar{q})|,
\end{aligned}$$

звідки маємо рівномірну оцінку

$$\frac{|Q_n^{(m)}(ish\tilde{\xi})|}{|Q_n^{(m)}(i\bar{q})|} \leq \frac{q^{n+1}}{(\text{ch}\tilde{\xi})^{n+1}}, \quad \tilde{\xi} \geq \tilde{\xi}^{(0)}. \quad (2.80)$$

Члени ряду (2.70) можна оцінити наступним чином ( $n \geq 1$ ):

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \\
&\leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[ \frac{|Q_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |Q_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos \tilde{\eta}_s)| \right] \leq \\
&\leq \sum_{s=1}^2 C_s (n |b_n^{(1)}| + |b_n|) \left( \frac{q_s}{\text{ch}\tilde{\xi}_s} \right)^{n+1}, \quad (2.81)
\end{aligned}$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Оцінка (2.81) показує, що при виконанні умови

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n |b_n^{(1)}| + |b_n|) < \infty \quad (2.82)$$

ряд (2.70) збігається абсолютно і рівномірно при  $\tilde{\xi}_s \geq \tilde{\xi}_s^{(0)}$  та його можна нескінченно диференціювати членами в області  $\tilde{\xi}_s > \tilde{\xi}_s^{(0)}$ . Останнє означає, що формула (2.70) задає розв'язок крайової задачі (2.8), (2.9), (2.39), який належить класу функцій  $C^2(\Omega^+) \cap \overline{C(\Omega^+)}$ , що завершує доведення теореми.

**Теорема 2.2.** За умови  $v_1 \neq v_2$  вектор-функції

$$\{\vec{V}_{1,0}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1), \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)\}_{n=1, s=1}^{\infty, 2} \quad (2.83)$$

в області  $\Omega^-$  утворюють базисні вісесиметричні системи розв'язків рівнянь (2.8), (2.9). Крім того, для визначника розв'язувальної системи першої крайової задачі в області  $\Omega^-$  для рівнянь (2.8), (2.9) при  $n \geq 2$  виконується оцінка

$$|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \frac{n-1}{n(2n-1)} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1, v_2)}, \quad (2.84)$$

де  $q_s = \text{ch} \tilde{\xi}_s^0$ ,  $\bar{q}_s = \text{sh} \tilde{\xi}_s^0$

**Доведення.** Аналогічно до попередньої теореми, припустимо, що гранична поверхня області  $\Omega^-$  є поверхня сфероїда  $\frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} = 1$ , причому  $d_1 / d_2 < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}\}$ . Для її описання зручно користуватися двома стиснутими системами сфероїдальних координат  $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$  (2.17). Тоді рівняння поверхні  $\partial\Omega$  задається рівнянням  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$ , де  $c_s \text{ch} \tilde{\xi}_s^0 = d_2$ ,  $\sqrt{v_s} c_s \text{sh} \tilde{\xi}_s^0 = d_1$  і виконується співвідношення (2.42).

Для обґрунтування базисності внутрішніх розв'язків (2.19) розглянемо при  $n \geq 1$  визначник

$$\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) = \begin{vmatrix} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \\ -\frac{k_1}{\sqrt{v_1}} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & -\frac{k_2}{\sqrt{v_2}} P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \end{vmatrix}. \quad (2.85)$$

Доведемо, що даний визначник не дорівнює нулю, та отримаємо оцінку знизу для його модуля. Для цього представимо його у наступному вигляді:

$$\Delta_n^{-(1)6} = P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[ \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right]. \quad (2.86)$$

Беручи до уваги, що  $k_s = \frac{c_{11}v_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}$ , визначник  $\Delta_n^{-(1)6}$  можна переписати у

вигляді:

$$\Delta_n^{-(1)6} = P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{c_{11}v_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{c_{11}v_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[ \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \left( \sqrt{v_1} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left( \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right) \right]. \quad (2.87)
\end{aligned}$$

Розглянемо функцію

$$\tau(v) = \sqrt{v} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})}, \quad (2.88)$$

де

$$\bar{q} = \text{sh} \xi^0 = \frac{d_1}{\sqrt{v d_2^2 - d_1^2}}.$$

Переконаємося у монотонному зростанні функції на півосі  $\mathbb{R}_+$ . Визначимо похідну функції:

$$\frac{d\tau(v)}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} + i\sqrt{v} \frac{\frac{dP_n(i\bar{q})}{dz} P_n^{(1)}(i\bar{q}) - P_n(i\bar{q}) \frac{dP_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz}}{[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \frac{d\bar{q}}{dv}.$$

Враховуючи формулу (2.47), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau(v)}{dv} &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{1}{[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + \right. \\
&\quad \left. + n(n+1)\bar{q}q[P_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \quad (2.89)
\end{aligned}$$

Розглянемо вираз у фігурних дужках попередньої формули

$$I_n = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + n(n+1)\bar{q}q[P_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}). \quad (2.90)$$

Його можна перетворити за допомогою рекурентних формул для функцій Лежандра першого роду:

$$\begin{aligned}
I_n &= P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + (n+1)\bar{q}P_n(i\bar{q})[iP_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})] - \\
&- \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) + \\
&+ \bar{q}^2(n+1)P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})[qP_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})] + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) - \\
& -(\bar{q})^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})[inP_{n-1}(i\bar{q}) - \bar{q}P_n(i\bar{q})] + \\
& + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) - (\bar{q})^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \\
& -i\bar{q}nP_{n-1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})[i\bar{q}P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}nP_{n-1}(i\bar{q})] - \\
& -i\bar{q}nP_{n-1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}) = \\
& = i\bar{q}nP_{n-1}(i\bar{q})P_n(i\bar{q}) - i\bar{q}nP_{n-1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+2)P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q}). \quad (2.91)
\end{aligned}$$

Розглянемо таку суму:

$$(-i)^{2n-1}[qP_{n-1}(i\bar{q})P_n(i\bar{q}) - \bar{q}P_{n-1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})]. \quad (2.92)$$

Останній вираз запишемо, користуючись розвиненням функції Лежандра першого роду в скінченну суму

$$P_n^{(m)}(i\bar{q}) = i^n q^m \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} \frac{(2n-2k)!(\bar{q})^{n-m-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-m-2k)!}, \quad (2.93)$$

де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ .

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}
& (-i)^{2n-1}[qP_{n-1}(i\bar{q})P_n(i\bar{q}) - \bar{q}P_{n-1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}P_n(i\bar{q})P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})] = \\
& = q(n-1) \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{(2n-2k-2)!(2n-2p-2)!(k-p)^2(\bar{q})^{2n-1-2k-2p}}{2^{2n-1}k!(n-k-1)!(n-2k)!p!(n-p-1)!(n-2p)!}. \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Тепер формули (2.89), (2.91), (2.93) показують, що  $\frac{d\tau(v)}{dv}$  є додатною при  $v \in (0, \infty)$ , тобто функція  $\tau(v)$  монотонно зростає на півосі  $\mathbb{R}_+$ . Більш того виконується оцінка

$$\frac{d\tau(v)}{dv} > \frac{\bar{q}}{\sqrt{v}} \frac{|P_n(i\bar{q})| |P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q})|^2}. \quad (2.95)$$

Тепер покажемо, що функція  $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})}$  є монотонно спадною на

півосі  $\mathbb{R}_+$ . З цією метою обчислимо похідну функції. Аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо:

$$\frac{d\sigma(v)}{dv} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} \frac{1}{[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \right. \\ \left. -n(n+1)\bar{q}q[P_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \quad (2.96)$$

Перетворимо вираз у фігурних дужках за допомогою рекурентних формул для функцій Лежандра першого роду:

$$\begin{aligned} & P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n(n+1)\bar{q}q[P_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = q^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n\bar{q}P_n(i\bar{q})[-iP_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})] = \\ & = q^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + i\bar{q}nP_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) + (\bar{q})^2 nP_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = q^2 P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})[qP_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})] - (\bar{q})^2 P_n^{(1)}(i\bar{q})P_n(i\bar{q}) + \\ & + i\bar{q}nP_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - i\bar{q}(n+1)P_{n+1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}nP_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = P_n(i\bar{q})[P_n^{(1)}(i\bar{q}) - i\bar{q}P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q})] - i\bar{q}(n+1)P_{n+1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = -i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n+1}(i\bar{q}) - i\bar{q}(n+1)P_{n+1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)P_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = -i(n+1) \left[ qP_n(i\bar{q})P_{n+1}(i\bar{q}) + \bar{q}P_{n+1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}P_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) \right]. \quad (2.97) \end{aligned}$$

Підставимо у вираз у квадратних дужках формули (2.97) суми (2.93). Після деяких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} & qP_n(i\bar{q})P_{n+1}(i\bar{q}) + \bar{q}P_{n+1}(i\bar{q})P_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}P_n(i\bar{q})P_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) = \\ & = i^{2n+1} \frac{qn}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \sum_{p=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(2n-2k)!(2n-2p)!(k-p)^2 (\bar{q})^{2n+1-2k-2p}}{k!(n-k)!(n-2k+1)!p!(n-p)!(n-2p+1)!}. \quad (2.98) \end{aligned}$$

Тепер формули (2.97), (2.98) показують, що похідна (2.96) є від'ємною, тобто сама функція  $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})}$  монотонно спадає на півосі  $\mathbb{R}_+$ .

Враховуючи встановлені властивості монотонності розглянутих функцій, можна стверджувати, що обидва доданки в квадратних дужках у формулі (2.87)

мають однаковий знак. Отже, визначник  $|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| \neq 0$ . Більш того, можна записати:

$$|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \left| \sqrt{v_1} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right|. \quad (2.99)$$

Для остаточного доведення теореми необхідний результат наступної леми.

**Лема 2.1.** При  $n \geq 2$  і  $\bar{q} \equiv \text{sh} \tilde{\xi} > 0$  виконуються оцінки

$$\left| \frac{P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} \right| > \frac{(n-1)}{(2n-1)\bar{q}}, \quad (2.100)$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{v}nd_2} = \frac{\bar{q}}{nq} < \frac{|P_n(i\bar{q})|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q})|} < \frac{q}{n\bar{q}} = \frac{\sqrt{v}d_2}{nd_1}. \quad (2.101)$$

**Доведення.** Доведемо першу оцінку. Для цього на півосі  $\tilde{\xi} \in (0, \infty)$  розглянемо функцію

$$v(\bar{q}) = \frac{i}{\bar{q}} \frac{P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})}. \quad (2.102)$$

Вона приймає додатні значення. Доведемо, що вона монотонно спадає на всій півосі. Для цього перетворимо її за допомогою рекурентних формул для функцій Лежандра

$$v(\bar{q}) = \frac{i}{\bar{q}} \frac{P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} = \frac{i}{\bar{q}} \frac{i\bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q}) - iqnP_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} = -1 + \frac{q}{\bar{q}} n \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})}. \quad (2.103)$$

Знайдемо похідну функції (2.103)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{dv(\bar{q})}{d\tilde{\xi}} &= -\frac{1}{\bar{q}^2} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} + \frac{q}{\bar{q}[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left[ \frac{dP_n(i\bar{q})}{d\tilde{\xi}} P_n^{(1)}(i\bar{q}) - P_n(i\bar{q}) \frac{dP_n^{(1)}(i\bar{q})}{d\tilde{\xi}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\bar{q}^2} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} + \frac{q}{\bar{q}} - \frac{q}{\bar{q}[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} P_n(i\bar{q}) \left[ n(n+1)P_n(i\bar{q}) - \frac{\bar{q}}{q} P_n^{(1)}(i\bar{q}) \right] = \\ &= \frac{1}{[\bar{q}P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ (-1 + \bar{q}^2) P_n(i\bar{q}) P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \bar{q}qn(n+1)[P_n(i\bar{q})]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Похідна  $\frac{dv(\bar{q})}{d\tilde{\xi}}$  лише від'ємним множником відрізняється від похідної (2.89),

тому з попереднього доведення теореми випливає, що вона є від'ємною. Отже, функція  $v(\bar{q})$  монотонно спадає на півосі  $\tilde{\xi} \in (0, \infty)$ . Тоді найменше значення ця функція приймає при  $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$ . Скористаємось асимптотикою функції Лежандра при  $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$

$$v(\bar{q}) = \frac{i}{\bar{q}} \frac{P_{n-1}^{(1)}(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} \sim \frac{n-1}{(2n-1)\bar{q}^2}, \quad \tilde{\xi} \rightarrow \infty.$$

В результаті приходимо до оцінки (2.100).

Оцінка (2.101) випливає з рекурентних формул для функцій Лежандра.

**Завершення доведення теореми 2.2.** Тепер можна отримати остаточне доведення теореми 2.2. Скористаємось формулою Лагранжа для подання модуля останнього множника у формулі (2.99):

$$\left| \sqrt{v_1} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \sqrt{v_2} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right| = \left| \frac{d\tau}{dv}(\mu) \right| |v_1 - v_2|,$$

де  $\mu$  розташовано між  $v_1$  і  $v_2$ . Тоді нерівність (2.99) сумісно з оцінками (2.95), (2.100), (2.101) дає при  $n \geq 2$

$$|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| > |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \frac{n-1}{n(2n-1)} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1, v_2)}. \quad (2.104)$$

Розглянемо окремо випадок  $n = 1$ . Для нього можна записати

$$\Delta_1^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) = -P_1^{(1)}(i\bar{q}_1)P_1^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right),$$

звідки

$$|\Delta_1^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| = |P_1^{(1)}(i\bar{q}_1)| |P_1^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1^2, v_2^2)}. \quad (2.105)$$

Перевіримо другу умову базисності для набору вектор-функцій (2.83).

Розглянемо першу крайову задачу для системи рівнянь (2.8), (2.9) в області  $\Omega^-$  з граничною умовою (2.39). Її розв'язок будемо шукати у вигляді



$$\vec{V} = a_{1,0} \vec{V}_{1,0}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s), \quad (2.106)$$

де  $a_{s,n}$  невідомі коефіцієнти. Переходячи до координатного вигляду (2.20) переміщень  $\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\xi_s, \eta_s)$  і задовольняючи граничні умови (2.39), для визначення коефіцієнтів  $a_{s,n}$  отримаємо алгебраїчну систему

$$-\frac{k_1}{\sqrt{v_1}} a_{1,n} = b_0; \quad (2.107)$$

$$P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) a_{1,n} + P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) a_{2,n} = -n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (2.108)$$

$$-\frac{k_1}{\sqrt{v_1}} P_n(i\bar{q}_1) a_{1,n} - \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} P_n(i\bar{q}_2) a_{2,n} = b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.109)$$

Визначником системи (2.108), (2.109) є визначник (2.85). Оскільки він відмінний від нуля згідно з теоремою 2.2, а, крім того,  $k_1 \neq 0$  оскільки  $k_1 k_2 = 1$ , то система (2.107) – (2.109) має єдиний розв'язок

$$a_{1,0} = -\frac{\sqrt{v_1}}{k_1} b_0, \quad (2.110)$$

$$a_{1,n} = \frac{\frac{k_2}{\sqrt{v_2}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_2) b_n^{(1)} - P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) b_n}{\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)}, \quad n \geq 1; \quad (2.111)$$

$$a_{2,n} = \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) b_n - \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_1) b_n^{(1)}}{\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)}, \quad n \geq 1. \quad (2.112)$$

З отриманих розв'язків і формули (2.104) випливають такі оцінки при  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} |a_{1,n}| &\leq \frac{\frac{|k_2|}{\sqrt{v_2}} n(n+1) |P_n(i\bar{q}_2)| |b_n^{(1)}| + |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| |b_n|}{|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)|} \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{n(2n-1)d_2}{(n-1)d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left[ \frac{|k_2|}{\sqrt{v_2}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_2)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} |b_n^{(1)}| + |b_n| \right] \leq \\ &\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{n(2n-1)d_2}{(n-1)d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left[ \frac{|k_2| d_2}{d_1} (n+1) |b_n^{(1)}| + |b_n| \right], \quad (2.113) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_{2,n}| &\leq \frac{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)| |b_n| + \frac{|k_1|}{\sqrt{v_1}} n(n+1) |P_n(i\bar{q}_1)| |b_n^{(1)}|}{|\Delta_n^{-(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)|} \leq \\
&\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{n(2n-1)d_2}{(n-1)d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left[ \frac{|k_1|}{\sqrt{v_1}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_1)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} |b_n^{(1)}| + |b_n| \right] \leq \\
&\leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\max(v_1, v_2)}{|v_1 - v_2|} \frac{n(2n-1)d_2}{(n-1)d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left[ \frac{|k_1| d_2}{d_1} (n+1) |b_n^{(1)}| + |b_n| \right]. \quad (2.114)
\end{aligned}$$

Тепер сформулюємо умови існування розв'язку крайової задачі (2.8), (2.9), (2.39) в області  $\Omega^-$  у вигляді (2.106). Для цього оцінимо члени ряду (2.106) за допомогою отриманих вище результатів. Перш за все, скористаємось ідеєю Е. Гобсона [143]. З теореми Ролля і властивості парності випливає, що многочлен Лежандра  $P_n(z)$  має тільки прості дійсні корені, розташовані симетрично відносно початку координат на інтервалі  $(-1, 1)$ . Тоді можна записати

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^{n-2p} (z^2 - \alpha_1^2)(z^2 - \alpha_2^2) \cdots (z^2 - \alpha_p^2),$$

де  $p = \left[ \frac{n}{2} \right]$ ,  $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \dots, \pm \alpha_p$  – корені  $P_n(z)$ , до яких у випадку непарності  $n$  треба ще додати  $z = 0$ . Звідси

$$\begin{aligned}
P_n(\text{ish}\tilde{\xi}) &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (\text{ish}\tilde{\xi})^{n-2p} (-\text{sh}^2\tilde{\xi} - \alpha_1^2)(-\text{sh}^2\tilde{\xi} - \alpha_2^2) \cdots (-\text{sh}^2\tilde{\xi} - \alpha_p^2) = \\
&= (-1)^p \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (\text{ish}\tilde{\xi})^{n-2p} (\text{sh}^2\tilde{\xi} + \alpha_1^2)(\text{sh}^2\tilde{\xi} + \alpha_2^2) \cdots (\text{sh}^2\tilde{\xi} + \alpha_p^2) = \\
&= (-1)^p \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (\text{ish}\tilde{\xi})^{n-2p} (\text{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_1^2)(\text{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_2^2) \cdots (\text{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_p^2),
\end{aligned}$$

де  $\beta_i^2 = 1 - \alpha_i^2 \in (0, 1)$ . Оскільки виконуються очевидні нерівності при  $\tilde{\xi} \leq \tilde{\xi}^{(0)}$

$$\frac{\text{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_i^2}{\text{ch}^2\tilde{\xi}^{(0)} - \beta_i^2} \leq \frac{\text{ch}^2\tilde{\xi}}{\text{ch}^2\tilde{\xi}^{(0)}}, \quad \frac{\text{sh}\tilde{\xi}}{\text{sh}\tilde{\xi}^{(0)}} \leq \frac{\text{ch}\tilde{\xi}}{\text{ch}\tilde{\xi}^{(0)}},$$

то можна записати

$$\left| \frac{P_n(ish\tilde{\xi})}{P_n(ish\tilde{\xi}^{(0)})} \right| = \frac{(\operatorname{sh}\tilde{\xi})^{n-2p} (\operatorname{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_1^2)(\operatorname{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_2^2) \cdots (\operatorname{ch}^2\tilde{\xi} - \beta_p^2)}{(\operatorname{sh}\tilde{\xi}^{(0)})^{n-2p} (\operatorname{ch}^2\tilde{\xi}^{(0)} - \beta_1^2)(\operatorname{ch}^2\tilde{\xi}^{(0)} - \beta_2^2) \cdots (\operatorname{ch}^2\tilde{\xi}^{(0)} - \beta_p^2)} \leq \left( \frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}^{(0)}} \right)^n. \quad (2.115)$$

Аналогічним чином доводиться нерівність при  $\tilde{\xi} \leq \tilde{\xi}^{(0)}$

$$\left| \frac{P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi})}{P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}^{(0)})} \right| \leq \left( \frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}^{(0)}} \right)^n. \quad (2.116)$$

Тепер члени ряду (2.106) за допомогою оцінок (2.113) – (2.116), можна оцінити так ( $n \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \\ & \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[ \frac{|P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |P_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos \tilde{\eta}_s)| \right] \leq \\ & \leq \sum_{s=1}^2 C_s [(n+1)|b_n^{(1)}| + |b_n|] \left( \frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}{q_s} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Оцінка (2.117) показує, що при виконанні умови

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n|b_n^{(1)}| + |b_n|) < \infty \quad (2.118)$$

ряд (2.106) збігається абсолютно і рівномірно при  $\tilde{\xi}_s \leq \tilde{\xi}_s^{(0)}$  та його можна нескінченно диференціювати членами в області  $\tilde{\xi}_s < \tilde{\xi}_s^{(0)}$ . Останнє означає, що формула (2.106) задає розв'язок крайової задачі (2.8), (2.9), (2.39) в області  $\Omega^-$ , який належить класу функцій  $C^2(\Omega^-) \cap \overline{C(\Omega^-)}$ , що завершує доведення теореми.

### 2.3 Теореми додавання для вісесиметричних базисних стиснутих сфероїдальних розв'язків

У роботі [127] було отримано теореми додавання базисних розв'язків системи рівнянь (2.1) у різних парах канонічних систем координат у випадку, коли всі вони

мають спільний початок. У цій дисертації отримано теореми додавання вісесиметричних стиснутих сфероїдальних розв'язків у системах координат, початки яких довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір, в якому зафіксуємо дві точки  $O_1$  і  $O_2$ , розташовані на осі анізотропії, з відстанню між ними  $z_{12}$  ( $z_{12} > 0$ ). Уведемо в просторі декартову систему координат  $(x, y, z)$  та пов'язану з нею циліндричну систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , з віссю  $Oz$ , яка має напрямний вектор  $\overrightarrow{O_1O_2}$ . Крім того, з кожною точкою  $O_j$  пов'яжемо однаково напрямлену з системою координат  $Oxyz$  локальну декартову систему  $(x_j, y_j, z_j)$ , а також дві декартові  $\{(x_{js}, y_{js}, z_{js})\}_{s=1}^2$  і дві стиснуті сфероїдальні системи координат  $\{(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}, \varphi)\}_{s=1}^2$ , такі, що

$$x = x_j = x_{js} = a_{js} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \cos \varphi, \quad y = y_j = y_{js} = a_{js} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \sin \varphi,$$

$$z_1 = z_2 + z_{12}, \quad \frac{z_j}{\sqrt{v_s}} = z_{js} = a_{js} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{js} \cos \tilde{\eta}_{js}. \quad (2.119)$$

Умови на параметри і координати наведено після формули (2.17). Тут і далі параметри стиснутих сфероїдальних координат позначено як  $a_{js}$ , щоб не плутати їх з пружними сталими.

**Теорема 2.3.** При  $\sqrt{v_s} a_{1s} + \sqrt{v_s} a_{2s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_2 < z_{12}$  виконується теорема додавання

$$\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}), \quad (2.120)$$

При  $\sqrt{v_s} a_{2s} + \sqrt{v_s} a_{1s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_1 < z_{12}$  виконується теорема додавання

$$\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) (-1)^n \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)k}(-a_{1s}), \quad (2.121)$$

де

$$g_n^{\pm(64)j}(a_{1s}) = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n} (\pm 1)^n}{\Gamma(j/2 - n/2 + 1) \Gamma(j/2 + n/2 + 3/2)} \left( -\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{1s}}{z_{12}} \right)^{j+1},$$

$$f_j^{(46)k}(a_{2s}) = \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}(k+1/2)\varepsilon_{p,k}(p+j)!}{\Gamma(p/2-k/2+1)\Gamma(p/2+k/2+3/2)} \left( \frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}} \right)^p,$$

$$\varepsilon_{n,k} = \begin{cases} 1, & n-k=2p, p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n-k=2p+1, p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$  – гамма-функція Ейлера.

**Доведення.** Візьмемо за основу формулу додавання для гармонічних функцій [141], з якої випливає

$$u_n^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=0}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}). \quad (2.122)$$

Перетворимо різницю

$$\begin{aligned} & u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \left[ \sum_{j=n-1}^{\infty} g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) - \sum_{j=n+1}^{\infty} g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) \right] = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n-1}^{\infty} [g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) - g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s})] f_j^{(46)k}(a_{2s}). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Окремо перетворимо

$$\begin{aligned} & g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) - g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s}) = \\ & = \left[ \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n-1}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 1\right)} - \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n+1}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 2\right)} \right] \left( -\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{1s}}{z_{12}} \right)^{j+1} = \\ & = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j+1,n}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 2\right)} \left( -\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{1s}}{z_{12}} \right)^{j+1} \left( n + \frac{1}{2} \right) = \\ & = i \frac{z_{12}}{\sqrt{v_s} a_{1s}} (2n+1) g_n^{+(64)j+1}(a_{1s}). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Підставимо (2.124) у (2.123) і змінимо індекс підсумовування

$$u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) =$$

$$= i \frac{z_{12}}{\sqrt{v_s} a_{1s}} (2n+1) \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_{j-1}^{(46)k}(a_{2s}). \quad (2.125)$$

Тепер перетворимо вираз

$$\begin{aligned} \frac{f_j^{(46)k+1}(a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1}(a_{2s})}{k-1/2} &= \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k+1} (p+j)!}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}}\right)^p - \\ &- \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k-1} (p+j+1)!}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 1\right)} \left(\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}}\right)^p = \\ &= \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p+1,k} (p+j)! \left(-k - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}}\right)^p. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Виконаємо зсув індексу підсумовування у формулі (2.126) на одиницю

$$\begin{aligned} \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p+1,k} (p+j)! \left(-k - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}}\right)^p &= \\ = - \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k} (p+j-1)! \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{i}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{z_{12}}\right)^{p-1} &= \frac{2iz_{12}}{\sqrt{v_s} a_{2s}} f_{j-1}^{(46)k}(a_{2s}). \end{aligned}$$

Підстановка останньої формули в (2.126) дає

$$f_{j-1}^{(46)k}(a_{2s}) = \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{2iz_{12}} \left[ \frac{f_j^{(46)k+1}(a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1}(a_{2s})}{k-1/2} \right]. \quad (2.127)$$

Підставимо (2.127) у (2.125)

$$\begin{aligned} u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) &= \\ = \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) &\left[ \frac{f_j^{(46)k+1}(a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1}(a_{2s})}{k-1/2} \right]. \end{aligned}$$

Розділимо внутрішню суму в останній формулі на два доданки та в кожному з них виконаємо зсув індексу підсумовування — відповідно на одиницю вперед і назад.

$$\begin{aligned}
& u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \\
& = \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) \frac{f_j^{(46)k}(a_{2s})}{k+1/2} - \\
& - \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=-1}^{\infty} u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) \frac{f_j^{(46)k}(a_{2s})}{k+1/2} = \\
& = \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1/2} [u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) - u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})] \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) + \\
& + \frac{a_{2s}}{a_{1s}} (2n+1) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) [f_j^{(46)(-1)}(a_{2s}) - f_j^{(46)0}(a_{2s})]. \quad (2.128)
\end{aligned}$$

З формули (2.128) безпосередньо отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{-ia_{1s}}{2n+1} [u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})] = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-ia_{2s}}{2k+1} [u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) - u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})] \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) - \\
& - ia_{2s} \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) [f_j^{(46)(-1)}(a_{2s}) - f_j^{(46)0}(a_{2s})]. \quad (2.129)
\end{aligned}$$

Остаточний результат отримується з останньої тотожності шляхом застосування оператора  $\vec{\nabla}_s$  до обох її частин.

Необхідно показати, що ряди у формулі (2.120) збігаються абсолютно та рівномірно на кожній компактній підмножині області  $\sqrt{v_s} a_{1s} + \sqrt{v_s} a_{2s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_2 < z_{12}$ .

Для цього подвійний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})| \sum_{j=0}^{\infty} |g_n^{+(64)j}(a_{1s})| |f_j^{(46)k}(a_{2s})|$$

мажоруємо рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) |P_k(i \operatorname{sh} \tilde{\xi}_2)| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n} (Z_1/2)^{j+1}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k} (p+j)! (Z_2/2)^p}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2}+\frac{3}{2}\right)},$$

де  $Z_j = \frac{\sqrt{v_s} a_{js}}{z_{12}}$ . У свою чергу можна довести, що останній ряд оцінюється зверху наступним рядом:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) |P_k(\text{ish}\tilde{\xi}_2)| Q_k\left(\frac{1}{Z_2} - \frac{Z_1}{Z_2}\right).$$

Збіжність останнього ряду при виконанні умови  $\sqrt{v_s} a_{1s} + \sqrt{v_s} a_{2s} \text{ch}\tilde{\xi}_2 < z_{12}$  впливає з асимптотичної поведінки при  $k \rightarrow \infty$  функцій Лежандра першого і другого роду. Нескладно переконатися, що для розглянутих функціональних рядів також виконується умова можливості почленного диференціювання.

Формула (2.121) доводиться аналогічним способом.

## 2.4 Другі вісесиметричні крайові задачі для трансверсально-ізотропних стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною

Задачі, які розглядаються в цьому параграфі, не тільки важливі самі по собі, але їх результати використовуються в подальших розділах.

Розглянемо другу крайову задачу для системи рівнянь (2.8), (2.9) в трансверсально ізотропному просторі зі стиснутою сфероїдальною порожниною

$$\Omega^+ = \left\{ (x, y, z) : \frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} > 1 \right\},$$

причому  $d_1 / d_2 < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}\}$  ( $v_1, v_2$  – додатні корені рівняння (2.16)). Для описання області  $\Omega^+$  зручно користуватися двома стиснутими системами сфероїдальних координат  $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$  (2.17). Тоді рівняння поверхні  $\partial\Omega^+$  задається рівнянням  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$ , де  $c_s \text{ch}\tilde{\xi}_s^0 = d_2$ ,  $\sqrt{v_s} c_s \text{sh}\tilde{\xi}_s = d_1$ . Як граничну умову в задачі виберемо довільне вісесиметричне навантаження на поверхні  $\partial\Omega^+$

$$F\vec{V}\Big|_{\tilde{\xi}_s=\tilde{\xi}_s^0} = \frac{c_{44}}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos\tilde{\eta}) \vec{e}_\rho + b_n P_n(\cos\tilde{\eta}) \vec{e}_z \right], \quad (2.130)$$



де  $H$  уведено після формули (2.34). Умови на коефіцієнти ряду (2.130) будуть наведені пізніше.

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду (2.70), де  $\{a_{s,n}\}_{s=1,n=0}^{2,\infty}$  – невідомі коефіцієнти. Перейдемо у формулі (2.70) до напружень на поверхні  $\partial\Omega^+$  згідно з формулою (2.38) (враховуємо протилежний напрям вектора зовнішньої нормалі), після чого задовольнимо граничним умовам (2.130). В результаті отримаємо алгебраїчну систему відносно  $\{a_{s,n}\}_{s=1,n=0}^{2,\infty}$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,0} \frac{c_{12}v_s - c_{13}k_s - c_{44}(k_s + 1)}{c_{44}\sqrt{v_s}} \frac{\bar{q}_s}{q_s} Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = 0, \quad (2.131)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,0}(k_s + 1)Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_0, \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \left[ \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1)Q_n(i\bar{q}_s) + \frac{c_{12}v_s - c_{13}k_s - c_{44}(k_s + 1)}{c_{44}\sqrt{v_s}} \frac{\bar{q}_s}{q_s} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) \right] = \\ = n(n+1)b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n}(k_s + 1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.134)$$

Перетворимо коефіцієнт при функції  $Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s)$  в рівняннях (2.131), (2.133)

$$\frac{c_{12}v_s - c_{13}k_s - c_{44}(k_s + 1)}{c_{44}\sqrt{v_s}}$$

за допомогою формули (2.13)

$$\frac{c_{12}v_s - c_{13}k_s - c_{44}(k_s + 1)}{c_{44}\sqrt{v_s}} \frac{\bar{q}_s}{q_s} = -\frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2}. \quad (2.135)$$

Зазначимо, права частина рівності (2.135) є відємною константою, оскільки виражається через технічні константи

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} = \frac{2G}{G'},$$

де  $G, G'$  – модулі зсуву в площині ізоотропії та в перпендикулярному напрямку.

Систему (2.131) – (2.134) можна записати

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,0} Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = 0, \quad (2.136)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,0} \frac{c_{11}v_s + c_{13}}{c_{13} + c_{44}} Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_0, \quad (2.137)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} \left[ \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_s) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) \right] = n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (2.138)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} (k_s + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.139)$$

Наступна теорема надає аналіз розв'язності системи (2.136) – (2.139) і умови існування класичного розв'язку крайової задачі.

**Теорема 2. 4.** При  $v_1 \neq v_2$  система (2.136) – (2.139) однозначно розв'язна. Для її визначника виконується оцінка

$$\left| \Delta_n^{+(2)6}(\xi_1^0, \xi_2^0) \right| \geq \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{c_{11} |v_1 - v_2|}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \left| Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right|, \quad n \geq 1. \quad (2.140)$$

При виконанні умови

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) |b_n^{(1)}| + |b_n| < \infty \quad (2.141)$$

існує розв'язок задачі (2.8), (2.9), (2.130) звичайним методом Фур'є у формі (2.70), який належить простору  $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ .

**Доведення.** Перш за все, зазначимо, що рівняння (2.136) автоматично задовольняється через умову регулярності (2.71). Тоді система (2.136), (2.137) має розв'язок

$$a_{1,0} = ib_0 \frac{d_2}{c_1} \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}(v_2 - v_1)}, \quad a_{2,0} = ib_0 \frac{d_2}{c_2} \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}(v_1 - v_2)}. \quad (2.142)$$

Для аналізу розв'язності системи (2.138), (2.139) розглянемо визначник цієї системи

$$\begin{aligned}
 \Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \begin{vmatrix} \frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & (k_1+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \\ \frac{k_2+1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) & (k_2+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_2+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) - \\
 &- \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n(i\bar{q}_2) + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_1+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) = \\
 &= (k_1+1)(k_2+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ n(n+1) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \left( \frac{1}{k_2+1} - \frac{1}{k_1+1} \right) \right\}. \tag{2.143}
 \end{aligned}$$

Оскільки, як було доведено в параграфі 2.2, функція

$$\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$$

монотонно зростає, то обидва доданки у фігурних скобках (2.143) одного знаку,

тому визначник  $\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)$  відмінний від нуля і виконується оцінка (2.140).

Тоді система (2.138), (2.139) однозначно розв'язна та її розв'язки мають вигляд

$$\begin{aligned}
 a_{1,n} &= -[\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ b_n \left[ \frac{k_2+1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - b_n^{(1)} n(n+1)(k_2+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right\}, \quad n \geq 1; \tag{2.144}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2,n} &= -[\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ -b_n \left[ \frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + b_n^{(1)} n(n+1)(k_1+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right\}, \quad n \geq 1; \tag{2.145}
 \end{aligned}$$

З отриманих розв'язків і формул (2.140), (2.62) впливають такі оцінки:

$$|a_{1,n}| \leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \frac{1}{|v_1 - v_2|} \frac{d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left\{ |b_n| \left[ \frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_2)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_2 + 1) \right\} < \frac{C_1 n(|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (2.146)$$

$$|a_{2,n}| \leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \frac{1}{|v_1 - v_2|} \frac{d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left\{ |b_n| \left[ \frac{k_1 + 1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_1)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_1 + 1) \right\} < \frac{C_2 n(|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (2.147)$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Тепер можна оцінити члени ряду (2.70) за допомогою оцінок (2.146), (2.147) і (2.80)

$$\left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \\ \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[ \frac{|Q_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |Q_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos \tilde{\eta}_s)| \right] \leq \\ \leq \sum_{s=1}^2 \tilde{C}_s (n |b_n^{(1)}| + |b_n|) \left( \frac{q_s}{\text{ch} \tilde{\xi}_s} \right)^{n+1}, \quad (2.148)$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Оцінка (2.148) показує, що при виконанні умови (2.82) ряд (2.70) збігається абсолютно і рівномірно при  $\tilde{\xi}_s \geq \tilde{\xi}_s^{(0)}$  та його можна нескінченно диференціювати членами в області  $\tilde{\xi}_s > \tilde{\xi}_s^{(0)}$ . Останнє означає, що формула (2.70) задає розв'язок крайової задачі (2.8), (2.9), (2.130), який належить класу функцій  $C^2(\Omega^+) \cap \overline{C(\Omega^+)}$ . При виконанні більш жорсткої умови (2.141) можна показати, що вектор-функція  $\vec{V}$  належить ще і простору  $C^1(\overline{\Omega^+})$ .

Тепер розглянемо другу крайову задачу для системи рівнянь (2.8), (2.9) в трансверсально ізотропному стиснутому сфероїді

$$\Omega^- = \left\{ (x, y, z) : \frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} < 1 \right\}$$

з граничною умовою (2.130). Уважасмо, що умови, сформульовані на початку цього параграфа виконані. Для описання області  $\Omega^-$  будемо користуватися двома стиснутими системами сфероїдальних координат  $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$  (2.17) і введеними вище позначеннями.

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду (2.106), де  $\{a_{1,0}, a_{s,n}\}_{s=1,n=1}^{2,\infty}$  – невідомі коефіцієнти. Перейдемо у формулі (2.106) до напружень на поверхні  $\partial\Omega^+$  згідно з формулою (2.38), після чого задовольнимо граничним умовам (2.130). Після перетворення коефіцієнтів при функціях Лежандра в такий же спосіб, як у формулах (2.133), (2.134) отримаємо алгебраїчну систему відносно  $\{a_{s,n}\}_{s=1,n=1}^{2,\infty}$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} \left[ \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_s) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_s) \right] = -n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (2.149)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} (k_s + 1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_s) = -b_n, \quad n \geq 1. \quad (2.150)$$

Гранична умова при  $n=0$  виконується автоматично при будь-якому  $a_{1,0}$ , оскільки через умови статички, які є необхідними для існування розв'язку задачі, слушною є рівність  $b_0 = 0$ . У свою чергу це означає стандартний результат для такого типу задач – розв'язок задачі визначається однозначно з точністю до жорсткого зміщення.

Наступна теорема надає аналіз розв'язності системи (2.149) – (2.150) і умови існування класичного розв'язку крайової задачі.

**Теорема 2.5.** При  $v_1 \neq v_2$ ,  $n \geq 1$  система (2.149) – (2.150) однозначно розв'язна. Для її визначника виконується оцінка

$$|\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| \geq |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)| |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}(c_{13} + c_{44})} \sigma \frac{d_1}{d_2} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1^2, v_2^2)}, \quad (2.151)$$

При виконанні умови

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n | b_n^{(1)} | + | b_n |) < \infty \quad (2.152)$$

існує розв'язок задачі (2.8), (2.9), (2.130) звичайним методом Фур'є у формі (2.106), який належить простору  $C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$ .

**Доведення.** Для аналізу розв'язності системи (2.149), (2.150) розглянемо визначник цієї системи

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \begin{vmatrix} \frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1)P_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & (k_1+1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \\ \frac{k_2+1}{\sqrt{v_2}} n(n+1)P_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) & (k_2+1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{\sqrt{v_1}} n(n+1)P_n(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_2+1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) - \\ &- \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{\sqrt{v_2}} n(n+1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n(i\bar{q}_2) + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_1+1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) = \\ &= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ n(n+1)(k_1+1)(k_2+1) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_1-k_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Після деяких перетворень визначник можна подати в такому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \\ &= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{44}(c_{13}+c_{44})} n(n+1) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(c_{11}-c_{12})c_{11}}{c_{44}(c_{13}+c_{44})} \frac{d_1}{d_2} (v_1-v_2) \right\} = P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{44}(c_{13}+c_{44})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ n(n+1) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \frac{(c_{11} - c_{12})c_{11}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \frac{d_1}{d_2} (v_1 - v_2) \right\} = \\
& = P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}(c_{13} + c_{44})} \cdot \\
& \cdot \left\{ n(n+1) \left[ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + (1 - \sigma) \frac{d_1}{d_2} \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right\}, \quad (2.154)
\end{aligned}$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона в площині ізотропії.

Розглянемо функцію

$$\zeta(v) = n(n+1) \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} - \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\bar{q}}{q}. \quad (2.155)$$

Дослідимо її на монотонність. Для цього знайдемо її похідну

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta(v)}{dv} &= -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} n(n+1) \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} - \frac{\bar{q}q}{2\sqrt{v^3}} n(n+1) \frac{[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - P_n(i\bar{q}) \frac{d}{d\bar{\xi}} P_n^{(1)}(i\bar{q})}{[P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} + \frac{1}{\sqrt{v^3}} \frac{\bar{q}}{q} = \\
&= -\frac{n(n+1)}{2\sqrt{v^3} [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ q^2 P_n(i\bar{q}) P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \left[ \bar{q}q - \frac{2\bar{q}}{qn(n+1)} \right] [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \bar{q}qn(n+1) [P_n(i\bar{q})]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Можна довести, що вираз

$$(-i)^{2n} \left\{ q^2 P_n(i\bar{q}) P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \left[ \bar{q}q - \frac{2\bar{q}}{qn(n+1)} \right] [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \bar{q}qn(n+1) [P_n(i\bar{q})]^2 \right\}$$

при  $n \geq 1$  є додатним, тобто похідна  $\frac{d\zeta(v)}{dv} < 0$ , а функція  $\zeta(v)$  спадає на півосі

$\bar{\xi} \in (0, \infty)$ . Тоді

$$\begin{aligned}
\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}(c_{13} + c_{44})} \cdot \\
&\cdot \left\{ [\zeta(v_1) - \zeta(v_2)] + \sigma \frac{d_1}{d_2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \right\}. \quad (2.156)
\end{aligned}$$

Оскільки функція  $\frac{1}{v}$  також спадає, то обидва доданки у фігурних дужках

(2.156) однакового знаку, тому правильною є оцінка

$$|\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| \geq |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)| |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}(c_{13} + c_{44})} \sigma \frac{d_1}{d_2} \frac{|v_1 - v_2|}{\max(v_1^2, v_2^2)}. \quad (2.157)$$

Отже, визначник  $\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)$  при  $n \geq 1$  відмінний від нуля. Тоді система (2.149), (2.150) однозначно розв'язна та її розв'язки мають вигляд

$$a_{1,n} = [\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ b_n \left[ \frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right] - \right. \\ \left. - b_n^{(1)} n(n+1)(k_2 + 1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right\}, \quad n \geq 1; \quad (2.158)$$

$$a_{2,n} = [\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ -b_n \left[ \frac{k_1 + 1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right] + \right. \\ \left. + b_n^{(1)} n(n+1)(k_1 + 1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right\}, \quad n \geq 1; \quad (2.159)$$

З отриманих розв'язків і формул (2.151), (2.101) випливають такі оцінки:

$$|a_{1,n}| \leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \frac{1}{|v_1 - v_2|} \frac{d_2}{d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left\{ |b_n| \left[ \frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_2)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_2 + 1) \right\} < \frac{C_1 n (|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (2.160)$$

$$|a_{2,n}| \leq \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \frac{1}{|v_1 - v_2|} \frac{d_2}{d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left\{ |b_n| \left[ \frac{k_1 + 1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_1)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_1 + 1) \right\} < \frac{C_2 n (|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (2.161)$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Тепер можна оцінити члени ряду (2.106) за допомогою оцінок (2.160), (2.161), (2.115), (2.116)



$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \\
& \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[ \frac{|P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos\tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |P_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos\tilde{\eta}_s)| \right] \leq \\
& \leq \sum_{s=1}^2 \tilde{C}_s (n|b_n^{(1)}| + |b_n|) \left( \frac{q_s}{ch\tilde{\xi}_s} \right)^{n+1}, \tag{2.162}
\end{aligned}$$

де константи  $C_s$  є додатними і залежать тільки від  $s$ .

Оцінка (2.162) показує, що при виконанні умови (2.82) ряд (2.106) збігається абсолютно і рівномірно при  $\tilde{\xi}_s \leq \tilde{\xi}_s^{(0)}$  та його можна нескінченно диференціювати членами в області  $\tilde{\xi}_s < \tilde{\xi}_s^{(0)}$ . Останнє означає, що формула (2.106) задає розв'язок крайової задачі (2.8), (2.9), (2.130), який належить класу функцій  $C^2(\Omega^-) \cap \overline{C(\Omega^-)}$ . При виконанні більш жорсткої умови (2.152) можна показати, що вектор-функція  $\vec{V}$  належить ще і простору  $C^1(\overline{\Omega^-})$ .

### Висновок до розділу

У другому розділі дисертаційної роботи здійснено розвиток узагальненого методу Фур'є для осесиметричних задач теорії пружності трансверсально-ізотропних тіл. Зокрема, отримані частинні розв'язки системи рівнянь рівноваги в переміщеннях у стиснутих сфероїдальних координатах. Ці розв'язки подано у вигляді вектор-функцій, що виражаються через функції Лежандра першого та другого роду.

Особливу увагу приділено математичному обґрунтуванню коректності побудованої базисної системи розв'язків. Вперше доведено базисність системи розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною

Крім того, в цьому розділі сформульовано та доведено теореми додавання для побудованих базисних функцій у стиснутих сфероїдальних координатах у

випадку, коли початки систем координат зміщено вздовж осі симетрії. Це розширення апарату узагальненого методу Фур'є суттєво підвищує його гнучкість та ефективність у задачах для багатозв'язних областей із декількома центрами симетрії або порожнинами.

Отримані результати створюють потужний математичний інструментарій для розв'язання складних крайових задач, які розглядатимуться у подальших розділах, зокрема задач із внутрішніми порожнинами, системами тріщин та періодичними структурами. Отримані базисні функції та доведена їх базисність є ключовими для реалізації чисельно-аналітичного підходу, ґрунтованого на розкладанні розв'язку в ряди, що забезпечують як високу точність, так і аналітичну строгість при подальших обчисленнях.

### РОЗДІЛ 3

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СТИСНУТОГО СФЕРОЇДА ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

### 3.1 Постановка задачі

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний стиснутий сфероїд зі стиснутою сфероїдальною порожниною. Цю область позначимо  $\Omega$ . Поверхні порожнини і сфероїда позначимо  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Будемо вважати, що їх центри суміщені та знаходяться в точці  $O$ . З цією точкою сумістимо циліндричну систему  $(\rho, \varphi, z)$  так, що вісь  $Oz$  буде збігатися з віссю симетрії сфероїдів і віссю анізотропії. Поверхня  $\Gamma_j$  має рівняння

$$\frac{\rho^2}{d_{j,2}^2} + \frac{z^2}{d_{j,1}^2} = 1, \quad (3.1)$$

причому  $d_{j,1}/d_{j,2} < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}\}$ ,  $i=1,2$  ( $v_1, v_2$  – додатні корені рівняння (2.15)). Особливість трансверсально-ізотропного тіла, яке займає область  $\Omega$ , полягає в тому, що його межу неможливо описати тільки однією парою стиснутих сфероїдальних координат, навіть, коли поверхні (3.1) мають спільний фокальний диск. Отже, задачу для двозв'язної області розглянутої геометрії неможна розв'язати звичайним методом Фур'є і можливо це зробити тільки узагальненим методом Фур'є. Для описання області  $\Omega$  зручно користуватися двома парами стиснутих сфероїдальних систем координат  $\{(\tilde{\xi}_{j,s}, \tilde{\eta}_{j,s}, \varphi)\}_{s,j=1}^2$ , пов'язаних з циліндричними координатами формулами

$$\rho = a_{j,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{j,s} \sin \tilde{\eta}_{j,s}, \quad z = \sqrt{v_s} a_{j,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{j,s} \cos \tilde{\eta}_{j,s}.$$

Тоді рівняння поверхні  $\Gamma_j$  задається рівнянням  $\tilde{\xi}_{j,s} = \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)}$ , де

$$a_{j,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)} = d_{j,2}, \quad \sqrt{v_s} a_{j,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)} = d_{j,1} \quad (\text{параметри стиснутих сфероїдальних систем})$$

координат, на відміну від розділу 2, позначено  $a_{j,s}$ , щоб не плутати їх з пружними сталими).

Розглянемо задачу визначення напруженого стану вказаного вище трансверсально-ізотропного тіла, в якому порожнина є вільною від напружень, а до зовнішньої поверхні прикладено довільне рівнозважене вісесиметричне навантаження

$$F\vec{V}\Big|_{\xi_{2,s}=\xi_{2,s}^{(0)}} = \frac{c_{44}}{H_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_2) \vec{e}_\rho + b_n^{(0)} P_n(\cos \tilde{\eta}_2) \vec{e}_z \right], \quad (3.2)$$

де

$$H_2 = \left( d_{2,1}^2 \sin^2 \tilde{\eta}_2 + d_{2,2}^2 \cos^2 \tilde{\eta}_2 \right)^{1/2}.$$

Умови на коефіцієнти ряду наведено в (2.152). У математичному формулюванні проблема зводиться до знаходження розв'язку крайової задачі для системи рівнянь (2.8), (2.9) в області  $\Omega$  з граничними умовами (3.2) і

$$F\vec{V}\Big|_{\xi_{1,s}=\xi_{1,s}^{(0)}} = 0. \quad (3.3)$$

Усі умови на параметри задачі наведено в розділі 2.

### 3.2 Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи

Загальний розв'язок задачі (2.8), (2.9), (3.2), (3.3) будемо шукати у вигляді

$$\vec{V}(\rho, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}), \quad (3.4)$$

де  $A_{s,n}^{(j)}$  – невідомі коефіцієнти, які визначаються в процесі побудови розв'язку задачі. Тут вже враховано умову статички на зовнішній поверхні тіла згідно з теоремою 2.5. Задачу будемо розв'язувати узагальненим методом Фур'є. Для цього скористаємось теоремами додавання базисних розв'язків (2.19), які є наслідками формул, отриманих у роботі [127]

$$\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) = \sum_{k=0}^n g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}), \quad (3.5)$$

$$\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}), \quad a_{2,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s} > a_{1,s}, \quad (3.6)$$

де

$$g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) = \sum_{p=k}^n \left( \frac{a_{1,s}}{a_{2,s}} \right)^p \frac{i^{n-p} \varepsilon_{n,p} \varepsilon_{p,k} (k+1/2) \Gamma(n/2 + p/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2 - p/2 + 1) \Gamma(p/2 - k/2 + 1) \Gamma(p/2 + k/2 + 3/2)}, \quad (3.7)$$

$$g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^{k-p} \varepsilon_{p,n} \varepsilon_{p,k} (k+1/2) \Gamma(p/2 + k/2 + 1/2)}{\Gamma(p/2 - n/2 + 1) \Gamma(p/2 + n/2 + 3/2) \Gamma(k/2 - p/2 + 1)} \left( \frac{a_{1,s}}{a_{2,s}} \right)^{p+1}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{n,k} = \begin{cases} 1, & n-k=2p, p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n-k=2p+1, p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$  – гамма-функція Ейлера.

Перетворимо вектор переміщень  $\vec{V}(\rho, z)$  до кожної окремої системи координат за допомогою формул (3.5), (3.6). В результаті маємо

$$\begin{aligned} \vec{V}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \sum_{k=0}^n g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) = \\ &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)}, \quad (3.9) \\ \vec{V}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) \sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)}. \quad (3.10)$$

Перейдемо в формулах (3.9), (3.10) від переміщень до напружень на поверхнях  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ , використовуючи для цього формулу (2.38):

$$\begin{aligned} F\vec{V}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s})|_{\Gamma_1} &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_1) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_1) \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} F\vec{V}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s})|_{\Gamma_2} &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_2) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_2) \sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Після підстановки формул (3.11), (3.12) у граничні умови (3.2), (3.3) отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{+(m)} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(m)} \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0; 1, \quad (3.13)$$

$$\sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{-(m)} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(m)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) \sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)} = f_n^{(m)}, \quad n \geq 1, \quad m = 0; 1, \quad (3.14)$$

де

$$t_{j,s,n}^{\pm(1)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) \left\{ \frac{Q_n(i\bar{q}_{j,s})}{P_n(i\bar{q}_{j,s})} \right\} - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_{j,1}}{d_{j,2}} \left\{ \frac{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})} \right\}, \quad (3.15)$$

$$t_{j,s,n}^{\pm(0)} = (k_s + 1) \left\{ \frac{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})} \right\}, \quad f_n^{(1)} = -n(n+1)b_n^{(1)}, \quad f_n^{(0)} = -b_n^{(0)}. \quad (3.16)$$

### 3.3 Аналіз розв'язувальної системи

Перетворимо систему до нормального вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1,n}^{(1)} + \frac{t_{1,2,n}^{+(0)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,1})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(2)} - \\ - \frac{t_{1,2,n}^{+(1)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,1})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(0)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} A_{2,n}^{(1)} + \frac{t_{1,1,n}^{+(1)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,2})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(0)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} A_{s,k}^{(2)} - \\ - \frac{t_{1,1,n}^{+(0)}}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} A_{s,k}^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} A_{1,n}^{(2)} + \frac{t_{2,2,n}^{-(0)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} A_{s,k}^{(1)} - \\ - \frac{t_{2,2,n}^{-(1)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} A_{s,k}^{(1)} = \\ = \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1}) t_{2,2,n}^{-(0)} f_n^{(1)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} - \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1}) t_{2,2,n}^{-(1)} f_n^{(0)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} A_{2,n}^{(2)} + \frac{t_{2,1,n}^{-(1)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(1)} - \\ - \frac{t_{2,1,n}^{-(0)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(1)} = \\ = \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2}) t_{2,1,n}^{-(1)} f_n^{(0)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} - \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2}) t_{2,1,n}^{-(0)} f_n^{(1)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

де

$$A_{s,n}^{(1)} = \frac{\tilde{A}_{s,n}^{(1)}}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})}, \quad A_{s,n}^{(2)} = \frac{\tilde{A}_{s,n}^{(2)}}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})}.$$

**Теорема 3.1.** При виконанні умови

$$a_{1,s} \text{sh} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)} < \begin{cases} a_{2,s} \text{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, & a_{1,s} < a_{2,s}, \\ a_{2,s} \text{ch} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, & a_{1,s} > a_{2,s}, \end{cases} \quad a_{2,s} \text{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} > \begin{cases} a_{1,s} \text{sh} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, & a_{2,s} < a_{1,s}, \\ a_{1,s} \text{ch} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, & a_{2,s} > a_{1,s}. \end{cases} \quad (3.21)$$

оператор системи (3.17) – (3.20) є фредгольмовим у просторі  $l_2^4$ .

**Доведення.** Для доведення теореми достатньо показати збіжність рядів

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{t_{2,p,n}^{-(j)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,3-p})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \frac{t_{2,s,n}^{+(1-j)} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \right|^2 < \infty, \quad (3.22)$$

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{t_{1,p,n}^{+(j)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,3-p})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \frac{t_{1,s,n}^{-(1-j)} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \right|^2 < \infty, \quad (3.23)$$

де  $j = 0, 1$ ;  $p, s = 1, 2$ .

Спершу зазначимо, що завдяки оцінкам (2.140), (2.151), (2.62), (2.101) можна оцінити множники загальних членів рядів (3.22), (3.23) таким чином:

$$\left| \frac{t_{2,p,n}^{-(j)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,3-p})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \right| < C^- n^j, \quad \left| \frac{t_{1,p,n}^{+(j)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,3-p})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \right| < C^+ n^j, \quad j = 0, 1. \quad (3.24)$$

З формули (3.6) випливає рівність Парсеваля

$$\int_0^\pi \left| Q_n(\text{ish} \tilde{\xi}_{1,s}) P_n(\cos \tilde{\eta}_{1,s}) \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2,s} d\tilde{\eta}_{2,s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left| g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) Q_k(\text{ish} \tilde{\xi}_{2,s}) \right|^2 \frac{2}{2k+1},$$

завдяки якій можна записати

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \frac{Q_n(\text{ish} \tilde{\xi}_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \right|^2 \frac{2}{2n+1} = \\ & = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{Q_k(\text{ish} \tilde{\xi}_{1,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} P_k(\cos \tilde{\eta}_{1,s}) \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2,s} d\tilde{\eta}_{2,s}. \end{aligned} \quad (3.25)$$



Підкреслимо, що в формулі Парсеваля  $(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s})$  і  $(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s})$  є координатами однієї і тієї ж точки. Підставимо в формулу (3.25)  $\tilde{\xi}_{2,s} = \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}$ . При цьому координата  $\tilde{\xi}_{1,s}$  на зафіксованій поверхні є деякою функцією  $\tilde{\xi}_{1,s} = \tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s})$ . Умовою збіжності ряду під інтегралом (3.25) завдяки оцінкам (2.62), (2.80) є нерівність

$$\tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s}) > \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)} \quad \forall \tilde{\eta}_{2,s} \in [0, \pi]$$

або, що теж саме,

$$\min_{\tilde{\eta}_{2,s} \in [0, \pi]} \tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s}) > \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}. \quad (3.26)$$

Знайдемо мінімальне значення координати в (3.26). Із формул зв'язку циліндричних і сфероїдальних координат випливає, що

$$\left( \frac{\operatorname{ch} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} \sin \tilde{\eta}_{2,s}}{\operatorname{ch} \tilde{\xi}_{1,s}} \right)^2 + \left( \frac{\operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} \cos \tilde{\eta}_{2,s}}{\operatorname{sh} \tilde{\xi}_{1,s}} \right)^2 = \left( \frac{a_{1,s}}{a_{2,s}} \right)^2,$$

звідки

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s} = \frac{q_{2,s}^2 - \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s} - \alpha^2 + \sqrt{(q_{2,s}^2 - \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s} - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \bar{q}_{2,s}^2 \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s}}}{2\alpha^2}, \quad (3.27)$$

де  $\alpha = a_{1,s} / a_{2,s}$ . Дослідимо праву частину формули (3.27) на екстремум. Можна показати, що при  $\alpha < 1$

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s}^{\min} = \frac{\bar{q}_{2,s}^2}{\alpha^2}. \quad (3.28)$$

Так само при  $\alpha > 1$

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s}^{\min} = \frac{q_{2,s}^2}{\alpha^2}. \quad (3.29)$$

Тепер наслідками формул (3.26), (3.28), (3.29) є перша умова збіжності (3.21).

Отже, за першою умовою (3.21) ряд ліворуч у (3.25) збігається. Неважко показати, що збіжність залишається при будь-яких додаткових множниках у

цьому ряді вигляду  $n^p, k^q$  ( $p, q > 0$ ). Тому, враховуючи оцінку (3.24) отримаємо (3.22).

Для ряду (3.23) аналогічний підхід приводить до другої умови збіжності (3.21).

Таким чином, теорему доведено.

**Зауваження.** Умовам збіжності методу (3.21) можна надати геометричного змісту:

$$d_{1,1} < \begin{cases} d_{2,1}, & a_{1,s} < a_{2,s}, \\ \sqrt{v_s} d_{2,2}, & a_{1,s} > a_{2,s}, \end{cases} \quad d_{2,1} > \begin{cases} d_{1,1}, & a_{2,s} < a_{1,s}, \\ \sqrt{v_s} d_{1,2}, & a_{2,s} > a_{1,s}. \end{cases}$$

Останні формули показують що не поверхні  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  не тільки не перетинаються, як геометричні об'єкти, а також мають таку ж властивість після перетворення подібності вздовж осі  $Oz$  з коефіцієнтом  $1/\sqrt{v_s}$ .

### 3.4 Задача про трансверсально-ізотропний стиснутий сфероїд з круговою тріщиною

Проілюструємо наведені в попередніх параграфах результати на прикладі чисельного розв'язання вісесиметричної задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда  $\Gamma_2$  (3.1) з круговою тріщиною  $\Gamma_1 = \{(p, z) : z = 0, p \in [0, a]\}$ , яка знаходиться під дією сталого нормального навантаження. Граничні умови на берегах тріщин ставляться таким чином:

$$\sigma_{z|\Gamma_1} = -\sigma, \quad \tau_{p z|\Gamma_1} = 0, \quad \tau_{\varphi z|\Gamma_1} = 0. \quad (3.30)$$

Зовнішня поверхня сфероїда вважається вільною від зусиль.

Якщо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді (3.4), то невідомі коефіцієнти  $A_{s,n}^{(j)}$  повинні задовольняти системі (3.13), (3.14) з іншими правими частинами:

$$\sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{+(m)} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(m)} \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)} = f_n^{(m)}, \quad n \geq 0, \quad m = 0; 1, \quad (3.31)$$

$$\sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{-(m)} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(m)} \sum_{k=0}^n g_{k,n}^{+(66)}(a, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)} = 0, \quad n \geq 1, \quad m = 0; 1, \quad (3.32)$$

де коефіцієнти при невідомих описуються формулами (3.15), (3.16), в які треба підставити  $\bar{q}_{1,s} = 0$ , а права частина  $f_n^{(m)} = \delta_{m,0} \delta_{n,1} \sigma a / c_{44}$ .

Після чисельного розв'язання системи (3.31), (3.32) методом редукції можна проаналізувати, для прикладу, нормальні напруження, які виникають у площині тріщини поза її межею і задаються формулою

$$\begin{aligned} \sigma_z(\rho, 0)|_{\rho > a} = & \frac{c_{44}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} Q_n \left( i \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} \right) P_n^{(1)}(0) - \\ & - c_{44} \sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{a_{2,s}^2 - \rho^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} P_n^{(1)}(i0) P_n \left( \frac{\sqrt{a_{2,s}^2 - \rho^2}}{a_{2,s}} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

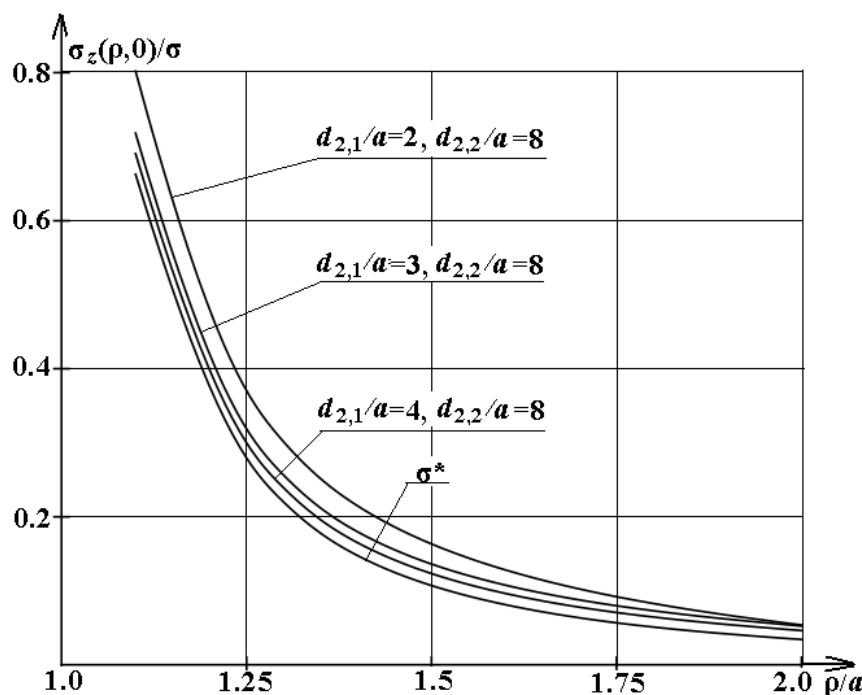


Рисунок 3.1 – Розподіл нормальних напружень в площині тріщини поза її межею

На рисунку 3.1 наведено графіки нормальних напружень  $\sigma_z(\rho, 0)|_{\rho > a} / a$  (3.33) в залежності від відносних розмірів півосей сфероїда. Тут символом  $\sigma^*$

позначено напруження, які відповідають тріщині в трансверсально-ізотропному просторі (задача має аналітичний розв'язок у замкненій формі). Графіки показують, що при фіксованому розмірі більшої півосі сфероїда напруження зростають при спаданні розміру меншої півосі. Інша ситуація спостерігається при фіксованому розмірі меншої півосі. Зміна розміру більшої півосі практично не впливає на величину напружень.

Запишемо також формулу для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень на межі тріщини

$$K_{1z} = \lim_{\rho \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(\rho - a)} \sigma(\rho, 0).$$

Перехід у системі (3.31'), (3.32) до безрозмірних невідомих за формулою:

$$A_{s,n}^{(j)} = \frac{\sigma a}{c_{44}} \tilde{A}_{s,n}^{(j)}$$

приводить до такої формули для КІН:

$$K_{1z} / (\sqrt{a}\sigma) = \sqrt{\pi} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,2k-1}^{(1)}. \quad (3.34)$$

Таблиця 3.1 – Значення КІН в залежності від відносних розмірів півосей сфероїда

$d_{2,1} / a \setminus d_{2,2} / a$	6.0	7.0	8.0
2.0	1.2382	1.2356	1.2336
3.0	1.1715	1.1694	1.1681
4.0	1.1506	1.1489	1.1479

У таблиці 3.1 наведено значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в залежності від відносних розмірів півосей сфероїда. Спостерігається спадання КІН як при фіксованому розмірі більшої півосі і зростанні розміру меншої, так і при фіксованому розмірі меншої півосі і зростанні розміру більшої. Для порівняння наведемо КІН тріщині в трансверсально-ізотропному просторі

$$K_{1z} / (\sqrt{a}\sigma) = 2 / \sqrt{\pi} \approx 1.1284.$$

Таблиця 3.2 – Практична збіжність методу редукції

$n_{\max} \setminus \rho / a$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
20	0.8021	0.2879	0.1608	0.1015	0.0665
30	0.8019	0.2873	0.1602	0.1012	0.0665
40	0.8019	0.2873	0.1602	0.1012	0.0665

У таблиці 3.2 на прикладі значень напруження  $\sigma_z(\rho, 0) \setminus \sigma$  при  $d_{2,1} / a = 2.0$ ,  $d_{2,2} / a = 8.0$  показано практичну збіжність методу редукції. Число  $n_{\max}$  задає параметр редукції, при якому розмір редукованої системи дорівнює  $4n_{\max} \times 4n_{\max}$ .

### Висновок до розділу

У третьому розділі дисертації вперше побудовано математичну модель напруженого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі сфероїдальною порожниною в осесиметричній постановці. Подібну задачу для витягнутого сфероїда було досліджено в роботі [133]. При реалізації узагальненого методу Фур'є суттєво використовуються результати розділу 2. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Строго доведено фредгольмовість оператора розв'язувальної системи задачі.

Чисельні розрахунки проводилися на прикладі задачі аналізу напруженого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда з екваторіально розташованою круговою тріщиною. Наведено графіки нормальних напружень в площині тріщини поза її межею в залежності від відносних геометричних розмірів півосей сфероїда.

В межах комп'ютерної моделі обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень на межі тріщини, що дозволило проаналізувати вплив геометрії тіла на локалізацію напруженого стану. До висновків, що стосуються якісної поведінки напружень, можна віднести зростання напружень і КІН при фіксованому розмірі більшої півосі сфероїда і спаданні розміру меншої півосі.

Проведено порівняння отриманих результатів з точним аналітичним розв'язком для тріщини в трансверсально-ізотропному просторі. Досліджено практичну збіжність методу редукції.

## РОЗДІЛ 4

ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПРОСТІР З ДВОМА  
ОДНОВІСНИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ

## 4.1 Загальна постановка задачі

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір ослаблений двома одновісними плоскими паралельними круговими тріщинами  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Позначимо центри цих тріщин  $O_1$  і  $O_2$ , а відстань між ними як  $z_{12}$  ( $z_{12} > 0$ ). Радіуси тріщин позначимо відповідно через  $a_1$  і  $a_2$ . Припускаємо, що *вісь анізотронії* трансверсально-ізотропного простору проходить через обидва центри тріщин. У просторі фіксуємо декартову систему координат  $(x, y, z)$  і зв'язану з нею циліндричну систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , з віссю  $Oz$ , яка має напрямний вектор  $\overrightarrow{O_1O_2}$ .

Потрібно визначити напружений стан описаного простору в разі прикладення нормального сталого навантаження  $\sigma$  до берегів тріщин. Математично ця задача зводиться до розв'язання крайової задачі для системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла, поданої в розділі 2 (рівняння (2.8) та (2.9)), де

$$(x, y, z) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2).$$

Граничні умови на берегах тріщин задаються у такому вигляді:

$$\sigma_{z|\Gamma_i} = -\sigma, \quad \tau_{\rho z|\Gamma_i} = 0, \quad \tau_{\varphi z|\Gamma_i} = 0 \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Для побудови частинних розв'язків системи рівнянь (2.8), (2.9), що узгоджуються з геометрією області  $\Omega$ , з кожною точкою  $O_j$  (центром відповідної тріщини) пов'яжемо однаково направлену з системою координат  $Oxyz$  локальну декартову систему координат  $(x_j, y_j, z_j)$ , а також дві декартові системи координат  $\{(x_{js}, y_{js}, z_{js})\}_{s=1}^2$  і дві стиснуті сфероїдальні системи координат  $\{(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}, \varphi)\}_{s=1}^2$ ,

такі, що відповідають умовам (2.17). Де  $c_s$  – параметр сфероїдальної системи координат, що збігається з радіусом відповідної тріщини.

З співвідношень (2.17) випливає, що на поверхні  $j$  – і тріщини координати набувають таких значень  $\tilde{\eta}_{j1} = \tilde{\eta}_{j2} = \tilde{\eta}_j$ .

#### 4.2 Побудова загального розв’язку задачі та її зведення до розв’язувальної системи

Загальний розв’язок задачі (2.8) – (2.9) запишемо у вигляді:

$$\vec{V}(x, y, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(j)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}), \quad (4.2)$$

де  $A_{s,n}^{(j)}$  – невідомі коефіцієнти, значення яких необхідно визначити в процесі розв’язання задачі.

Перейдемо до представлення вектора переміщень у кожній із локальних систем координат. У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_1, y_1, z_1) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)k}(-a_{1s}) = \\ &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)n}(-a_{1s}); \quad (4.3) \\ \vec{V}(x_2, y_2, z_2) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)n}(a_{2s}). \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Перейдемо в наведених вище формулах від векторів переміщень до компонент напружень на поверхнях  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Для цього скористаємося виразом (2.38):

$$\begin{aligned}
F\vec{V}(\rho, z_1)|_{\Gamma_1} &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{1s}=0} + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{1s}=0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)n}(-a_{1s}); \\
F\vec{V}(\rho, z_2)|_{\Gamma_2} &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)n}(a_{2s}).
\end{aligned}$$

Після переходу до координатної форми запису базисних напружень та врахування граничних умов одержуємо розв'язувальну систему рівнянь у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(1)} W_n^{+0} + \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) W_n^{-0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)n}(-a_{1s}) = \\
&= -\frac{\sigma a_1}{c_{44}} \delta_{n,1} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} A_{s,n}^{(1)} W_n^{+1} + \sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} W_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)n}(-a_{1s}) = 0; \quad (4.6) \\
&\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(2)} W_n^{+0} + \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) W_n^{-0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)n}(a_{2s}) =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\sigma a_2}{c_{44}} \delta_{n,1}; \quad (4.7)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s+1}{\sqrt{v_s}} A_{s,n}^{(2)} W_n^{+1} + \sum_{s=1}^2 \frac{k_s+1}{\sqrt{v_s}} W_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}) = 0, \quad (4.8)$$

де

$$W_n^{+1} = -Q_n(i0) = -(-i)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}; \quad W_n^{-1} = -P_n(i0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi n}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)};$$

$$W_n^{+0} = -Q_n^{(1)}(i0) = (-i)^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}; \quad W_n^{-0} = -P_n^{(1)}(i0) = i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi(n+1)}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Зауважимо, що при  $n=0$  система (4.5) – (4.8) задовольняється при  $A_{s,n}^{(1)} = A_{s,n}^{(2)} = 0$  ( $s=1, 2$ ), що є необхідною умовою регулярності розв'язку (4.2).

Систему (4.5) – (4.8) можна подати у вигляді:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s+1) A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(1,2)} A_{s,k}^{(2)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_1}{c_{44}} \delta_{n,1}; \quad (4.9)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s+1}{\sqrt{v_s}} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(2,2)} A_{s,k}^{(2)} = 0; \quad (4.10)$$

$$\sum_{s=1}^2 (k_s+1) A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(1,1)} A_{s,k}^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_2}{c_{44}} \delta_{n,1}; \quad (4.11)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s+1}{\sqrt{v_s}} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(2,1)} A_{s,k}^{(1)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

де

$$t_{s,n,k}^{(1,1)} = (k_s+1) \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{+(66)}; \quad t_{s,n,k}^{(1,2)} = (k_s+1) \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{-(66)};$$

$$t_{s,n,k}^{(2,1)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \frac{W_n^{-1}}{W_n^{+1}} h_{s,k,n}^{+(66)}; \quad t_{s,n,k}^{(2,2)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \frac{W_n^{-1}}{W_n^{+1}} h_{s,k,n}^{-(66)};$$

$$h_{s,k,n}^{+(66)} = \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)n}(a_{2s});$$

$$h_{s,k,n}^{-(66)} = \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j}(-a_{2s}) f_j^{(46)n}(-a_{1s}).$$

### 4.3 Аналіз розв'язувальної системи

**Теорема 4.1.** При  $a_{1s} + a_{2s} < z_{12} / \sqrt{v_s}, s=1,2$  оператор системи є фредгольмовим оператором в просторі  $l_2$ .

**Доведення.** Твердження теореми випливає з того факту, що відповідний оператор системи можна подати у вигляді суми неперервно оборотного та цілком неперервного операторів. Відповідно до відомої теореми С. М. Нікольського, такий оператор належить до класу фредгольмових. Для обґрунтування першого з цих тверджень достатньо показати, що визначник  $\Delta$ , утворений з коефіцієнтів при невідомих  $A_{s,n}^{(1)}, A_{s,n}^{(2)}$  у перших сумах лівих частин рівнянь системи, не дорівнює нулю. Це можна перевірити безпосередньо, оскільки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1 + 1 & k_2 + 1 \\ k_1 + 1 & k_2 + 1 \\ \sqrt{v_1} & \sqrt{v_2} \end{vmatrix} = \frac{k_1 + 1}{\sqrt{v_1}} \frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} (\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2}) \neq 0,$$

при  $v_1 \neq v_2$ .

Для доведення цілковитої (повної) неперервності оператора системи, що задається нескінченною матрицею з елементами  $t_{s,n,k}^{(i,j)}$ , як відомо, необхідно встановити збіжність відповідних числових рядів. Зокрема, потрібно показати, що збіжними є ряди вигляду:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |t_{s,n,k}^{(i,j)}|^2 < \infty \quad i, j, s = 1, 2. \quad (4.13)$$

Доведемо це, зокрема, для елементів  $t_{s,n,k}^{(1,1)}$ . Продиференціюємо обидві частини тотожності (2.122) за змінною  $\tilde{\xi}_{2s}$ , а потім підставимо значення  $\tilde{\xi}_{2s} = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} u_n^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} h_{s,k,n}^{+(66)}. \quad (4.14)$$

Зауважимо, що відповідна функція

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} = \frac{a_{2s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{2s} \cos \tilde{\eta}_{2s}}{a_{1s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{1s} \cos \tilde{\eta}_{1s}}$$

є регулярною при  $\tilde{\xi}_{2s} = 0$ , а ряд в (4.14) збігається при  $a_{1s} + a_{2s} < z_{12} / \sqrt{v_s}$ ,  $s = 1, 2$ . Скористаємося рівністю Парсеваля для ряду (4.14), щоб отримати оцінку його збіжності:

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} \frac{\partial u_n^{+(6)}}{\partial \tilde{\xi}_{1s}}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2s} d\tilde{\eta}_{2s} = \frac{1}{q^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} |P_k^{(1)}(i0)|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2$$

Після підстановки у наведену формулу  $|P_k^{(1)}(i0)|^2$  підсумуємо обидві її частини останньої формули за індексом  $n$  від одиниці до нескінченності:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} \frac{\partial u_n^{+(6)}}{\partial \tilde{\xi}_{1s}}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2s} d\tilde{\eta}_{2s} = \\ & = \frac{4}{\pi} \frac{1}{q^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{\pi k}{2} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Із відомих асимптотичних властивостей функцій Лежандра першого та другого роду випливає, що ряд у лівій частині останньої формули є збіжним. Відтак, за рівністю (4.15), збігається також і ряд у правій частині тотожності. Аналогічним чином можна довести збіжність ряду виду:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cos^2 \frac{\pi k}{2} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2. \quad (4.16)$$

З іншого боку,

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |t_{s,n,k}^{(1,1)}|^2 = (k_s + 1)^2 \sum_{n,k=1}^{\infty} \left| \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{+(66)} \right|^2 = (k_s + 1)^2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{2} |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2 \quad s = 1, 2$$

до того ж ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{2} |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2$$

мажоредується рядом

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2,$$

збіжність якого впливає зі збіжності рядів (4.15), (4.16).

Аналогічні міркування застосовуються для доведення нерівності (4.13) при інших значеннях індексів  $i$  та  $j$ .

Отже, теорему повністю доведено.

#### 4.4 Чисельний експеримент

Для визначення напруженого стану в розглянутій задачі необхідно здійснити чисельне розв'язання системи рівнянь (4.9)–(4.12). Оскільки відповідний оператор є фредгольмовим, застосування методу редукції є коректним і обґрунтованим.

Отримане чисельне розв'язання використовується для обчислення певних характерних компонент напружень. Зокрема, формула для нормального напруження на поверхні  $z_1 = 0$  зовні тріщини  $\Gamma_1$  має вигляд:

$$\sigma_z = \frac{c_{44}}{\sqrt{\rho^2 - a_1^2}} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(1)}(0) \left[ A_{s,n}^{(1)} Q_n(ish \tilde{\xi}_{1s}) + \right. \right. \\ \left. \left. + P_n(ish \tilde{\xi}_{1s}) \sum_{k=1}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} h_{s,k,n}^{-(66)} \right] \right\} \quad (4.17)$$

Аналогічна формула справджується і в площині тріщини  $\Gamma_2$ .

Як впливає з формули (4.17), нормальне напруження демонструє характерну кореневу особливість поблизу вершини тріщини. Для кількісного порівняння

значень напружень за різних параметрів задачі вводять коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН):

$$K_{1z} = \lim_{\rho \rightarrow a_1+0} \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{z|z_1=0}}{\sigma} \frac{\sqrt{\rho^2 - a_1^2}}{a_1}.$$

Перехід у системі (4.9) – (4.12) до безрозмірних невідомих за формулою:

$$A_{s,n}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_1}{c_{44}} \tilde{A}_{s,n}^{(j)}$$

приводить до такої формули для КІН:

$$K_{1z} = \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,2k-1}^{(1)}.$$

Чисельні розрахунки виконувалися для випадку, коли матеріалом трансверсально-ізотропного простору обрано пісковик із наступними пружними характеристиками:  $c_{11} = 5.8576 \cdot 10^{10}$  Па,  $c_{12} = 2.5019 \cdot 10^{10}$  Па,  $c_{13} = 2.0793 \cdot 10^{10}$  Па,  $c_{33} = 6.1105 \cdot 10^{10}$  Па,  $c_{44} = 1.6584 \cdot 10^{10}$  Па. Для такого матеріалу корені характеристичного рівняння (2.15) становлять  $\nu_1 = 0.52$ ,  $\nu_2 = 2.01$ .

В таблиці 4.1 наведено результати чисельного розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_{1z}$  залежно від відносних розмірів тріщин, які визначаються як відношення радіусів тріщин до відстані між їх центрами.

Результати показують, що при фіксованому розмірі першої тріщини та поступовому збільшенні розміру другої тріщини значення КІН дещо зменшується. Навпаки, при зростанні розміру першої тріщини за фіксованого розміру другої спостерігається зростання КІН. Отримані результати добре узгоджуються з відомим значенням коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень 0.6366 що відповідає випадку однієї ізольованої тріщини. На основі проведених розрахунків можна сформулювати такий якісний висновок: КІН у вершині тріщини є більшим у випадку наявності лише однієї навантаженої тріщини, ніж у випадку, коли навантажені обидві тріщини.

Таблиця 4.1 – Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_{Iz}$  в залежності від відносних розмірів тріщин

$\frac{a_2}{z_{12}} \setminus \frac{a_1}{z_{12}}$	0.05	0.20	0.35
0.05	0.63644	0.636647	0.63651
0.20	0.62612	0.62758	0.63012
0.35	0.58966	0.59488	0.60468

Графіки розподілу нормальних напружень у площині  $z_1 = 0$  зовні тріщини  $\Gamma_1$  наведено на рисунках 4.1, 4.2. На рисунку 4.1 фіксується розмір першої тріщини  $a_1 / z_{12} = 0.05$  і змінюються розміри другої. На рисунку 4.2, фіксується розмір другої  $a_2 / z_{12} = 0.35$ , а змінюється розмір першої. У першому випадку спостерігається зменшення значень нормального напруження зі зростанням розміру другої тріщини. У другому — навпаки, напруження зростає зі збільшенням розміру першої тріщини.

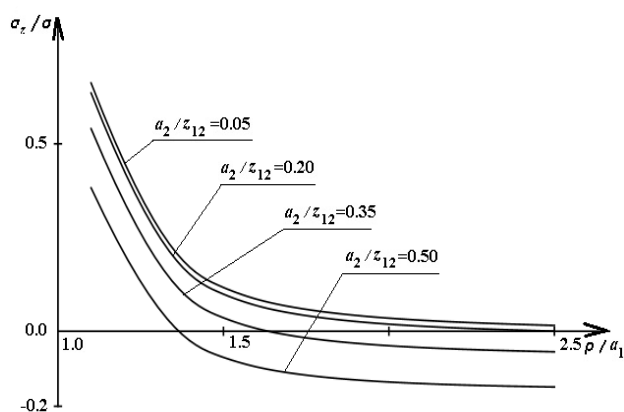


Рисунок 4.1 – Графіки розподілу напружень  $\sigma_z / \sigma$  в площині  $z_1 = 0$  зовні тріщини  $\Gamma_1$  при  $a_1 / z_{12} = 0.05$

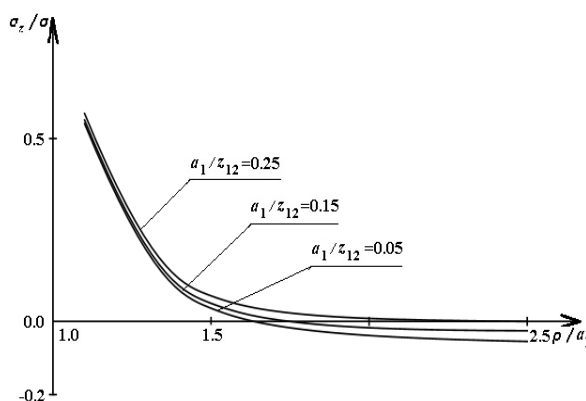


Рисунок 4.2 – Графіки розподілу напружень  $\sigma_z / \sigma$  в площині  $z_1 = 0$  зовні тріщини  $\Gamma_1$  при  $a_2 / z_{12} = 0.35$

Таблиця 4.2 – Збіжність методу редукції на прикладі обчислення напруження  $\sigma_z / \sigma$  при  $a_1 / z_{12} = a_2 / z_{12} = 0.25$

$\rho / a_1$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$n_{\max} = 15$	0.625291	0.184617	0.0872431	0.0488844	0.0302942
$n_{\max} = 20$	0.625291	0.184617	0.0872429	0.0488430	0.0302903

У таблиці 4.2 на прикладі обчислення нормального напруження  $\sigma_z / \sigma$  при  $a_1 / z_{12} = a_2 / z_{12} = 0.25$  продемонстровано практичну збіжність методу редукції. Тут параметр  $n_{\max}$  визначає кількість невідомих коефіцієнтів  $A_{s,n}^{(j)}$  однієї групи, які враховуються в редукованій системі. Відповідно, розмірність матриці такої системи дорівнює  $4n_{\max} \times 4n_{\max}$ . Результати, наведені в таблиці 4.2, свідчать про те, що відносна похибка обчислення напружень на інтервалі  $\rho / a_1 \in (1.1, 1.9)$  не перевищує 0.013 %.

В процесі дослідження також обчислювалися і дотичні напруження  $\tau_{\rho z}$  при  $z_1 = 0$ ,  $\rho / a_1 > 1$ , однак їх значення виявилися на порядок меншими за нормальні напруження, тому вони не наводяться.



## Висновок до розділу

У цьому розділі досліджено задачу про напружений стан трансверсально-ізотропного простору, ослабленого двома паралельними круговими тріщинами, центри яких розташовані на осі анізотропії простору. До площин тріщин прикладене стале нормальне навантаження.

Задачу розв'язано за допомогою узагальненого методу Фур'є. Для цього було введено стиснуті сфероїдальні системи координат, центровані в точках, що відповідають центрам тріщин. Загальний розв'язок побудовано у вигляді рядів за осесиметричними базисними векторними розв'язками системи рівнянь рівноваги в сфероїдальних координатах, які були раніше отримані О. Г. Ніколаєвим. Для реалізації методу проведено подальший розвиток його апарату на випадок стиснутих сфероїдальних координат із початками, зміщеними вздовж осі  $Oz$ .

Унаслідок застосування узагальненого методу Фур'є задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено, що за певних геометрико-механічних умов оператор цієї системи є фредгольмовим. Для чисельного розв'язання використано метод редукції.

Отримано графіки розподілу нормальних напружень у площині тріщини поза її межами, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершині тріщини за різних співвідношень геометричних параметрів. Результати добре узгоджуються з відомими аналітичними оцінками для задачі з однією тріщиною. Окрім того, продемонстровано практичну збіжність методу редукції, що підтверджує його ефективність у розв'язанні подібних задач.

## РОЗДІЛ 5

### ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТРІЩИН

#### 5.1 Загальна постановка задачі

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір з нескінченною системою одновісних паралельних плоских кругових тріщин  $\{\Gamma_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ . Позначимо центри тріщин як  $\{O_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ , відстань між тріщинами  $h$  ( $h>0$ ), радіуси відповідних тріщин  $a_l$ . Припускаємо, що вісь анізотропії трансверсально-ізотропного простору проходить через усі центри тріщин. Зафіксуємо в просторі декартову систему координат  $(x, y, z)$  і зв'язану з нею циліндричну систему  $(\rho, \varphi, z)$  з початками в точці  $O_0$ , з віссю  $Oz$ , яка має напрямний вектор  $\overrightarrow{O_0O_1}$ .

Необхідно визначити напружений стан вищевказаного простору в разі прикладення нормального сталого навантаження  $\sigma$  до берегів тріщин. Математично задача зводиться до розв'язання крайової задачі для системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла, поданої в розділі 2 (рівняння (2.8)–(2.9)), де

$$(x, y, z) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_l.$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{z|\Gamma_l} = -\sigma, \quad \tau_{\rho z|\Gamma_l} = 0, \quad \tau_{\varphi z|\Gamma_l} = 0; \quad l = -\infty \div \infty. \quad (5.1)$$

Умови на нескінченності будуть обговорюватися пізніше.

Для побудови частинних розв'язків системи рівнянь (2.8), (2.9), які відповідають геометрії області  $\Omega$ , з кожною точкою  $O_l$  пов'яжемо однаково направлену з системою координат  $Oxyz$  локальну декартову систему координат

$(x_l, y_l, z_l)$ , а також дві декартові  $\{(x_{ls}, y_{ls}, z_{ls})\}_{s=1}^2$  і дві стиснуті сфероїдальні  $\{(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}, \varphi)\}_{s=1}^2$  системи координат, такі, що відповідають умові (2.17).

Тут  $c_s$  – параметр сфероїдальної системи, який збігається з радіусом відповідної тріщини, рівняння поверхні  $l$ -ї тріщини є  $\tilde{\xi}_{ls} = 0$ .

Із співвідношень між координатами випливає, що на поверхні  $l$ -ї тріщини координати  $\tilde{\eta}_{l1} = \tilde{\eta}_{l2} = \tilde{\eta}_l$ .

## 5.2 Побудова розв'язку задачі в загальній постановці

Будемо шукати розв'язок задачі (2.8) – (2.9) з регулярними умовами при  $\rho \rightarrow \infty$  у вигляді

$$\vec{V}(x, y, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}), \quad (5.2)$$

де  $A_{s,n}^{(l)}$  – невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти в процесі розв'язання задачі.

Скористаємось результатом, доведеним в розділі 2 (теорема 2.3)

Перетворимо вектор переміщень (5.2) за допомогою формули (2.121) до кожної окремої системи координат. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_l, y_l, z_l) = & \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) + \\ & + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{n,k}^{m,l} A_{s,k}^{(m)} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Після переходу в формулі (5.2) від переміщень до напружень на поверхні  $\Gamma_l$  і виконання граничних умов (5.1) отримаємо розв'язувальну систему:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{0,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = \frac{2}{\pi} \delta_{n,1}; \quad (5.4)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{1,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = 0; \quad (5.5)$$

де

$$t_{0,n,k}^{s,m,l} = i^n \frac{2}{\pi} \frac{a_m}{a_l} \sin(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s}, \quad t_{1,n,k}^{s,m,l} = i^{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{a_m}{a_l} \cos(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s};$$

$$A_{s,n}^{(l)} = \frac{\sigma a_l}{c_{44}} \tilde{A}_{s,n}^{(l)}, \quad h_{m,l,n,k}^{(66)s} = \omega_{n,k}^{m,l} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}).$$

Зауважимо, що при  $n=0$  система (5.4) – (5.5) задовольняється при  $\tilde{A}_{s,n}^{(l)} = 0$  ( $s=1, 2$ ), що є необхідною умовою регулярності розв'язку (5.2).

### 5.3 Розв'язання задач з періодичною системою тріщин

Для того, щоб поставити періодичну задачу, слід з'ясувати, що треба розуміти під такою задачею. Зауважимо, що не для всякої системи тріщин, яка періодично повторюється, можна коректно поставити періодичну задачу. В роботі [142] була запропонована ідея представницького шару в термопружній задачі для періодичної системи сферичних включень, на межах якого вибиралися граничні умови, які допускали періодичне продовження до нескінченності. Зазвичай це певні однорідні умови, які можна реалізувати на нескінченності. Але, якщо у статті [142] періодична задача була заміненна на еквівалентну задачу для представницького шару, то в даній роботі розв'язуються саме періодичні задачі, а умови на межах представницького шару перевіряються чисельно (їх виконання впливає з певної симетрії розглянутих задач).

#### 5.3.1 Конфігурація 1

Розглянемо систему однакових тріщин (конфігурація 1). Представницький шар для такої системи зображено на рисунку 5.1.

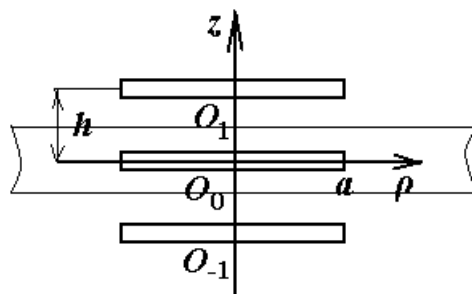


Рисунок 5.1 – Представницький шар. Конфігурація 1

Оскільки задача є періодичною, то невідомі коефіцієнти  $\tilde{A}_{s,n}^{(l)}$  не повинні залежати від індексу  $l$ . Тоді систему (5.4), (5.5) можна переписати у такому вигляді:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left[ \tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{0,n,k}^{s,m,0} \right] = \frac{2}{\pi} \delta_{n,1}; \quad (5.6)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{1,n,k}^{s,m,0} \right] = 0. \quad (5.7)$$

**Теорема 5.1.** При виконанні умови  $a_{ls} + a_{ms} < h / \sqrt{v_s}$ ,  $l \neq m$ ,  $s = 1, 2$  оператор системи (5.6), (5.7) є фредгольмовим оператором у гільбертовому просторі  $l_2 \times l_2$ .

**Доведення.** Для доведення теореми достатньо показати абсолютну збіжність рядів

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{m \neq l} t_{r,n,k}^{s,m,l} \quad r = 0, 1; \quad s = 1, 2; \quad l = -\infty \div \infty.$$

Позначимо

$$Z_{s,m,l} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{|m - l| h}.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{m \neq l} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} |g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms})| |f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls})|.$$

Його можна перетворити шляхом заміни порядків та індексів підсумовування на ряди вигляду

$$\sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} (p+j)! Z_{l,m}^{j+1} Z_{m,l}^p \sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{\sqrt{\pi}}{s! \Gamma(j-s+3/2)} \sum_{r=1}^{[p/2]} \frac{\sqrt{\pi}(p-2r+1/2)}{r! \Gamma(p-r+3/2)}.$$

Скористаємось оцінками

$$\sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{1}{s! \Gamma(j-s+3/2)} \leq \sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{1}{s! \Gamma(j-s+1)} \leq \sum_{s=0}^j \frac{1}{s! (j-s)!} = \frac{2^j}{j!},$$

$$\sum_{r=1}^{[p/2]} \frac{(p-2r+1/2)}{r! \Gamma(p-r+3/2)} \leq \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r! (p-1-r)!} \leq \frac{2^{p-1}}{(p-1)!}.$$

В результаті вихідний ряд мажорується рядом

$$\begin{aligned} & \sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} (p+j)! \frac{2^j}{j!} Z_{l,m}^{j+1} \frac{2^{p-1}}{(p-1)!} Z_{m,l}^p = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j! (p-1)!} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{|m-l|h} \right)^{j+1} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{|m-l|h} \right)^p = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j! (p-1)!} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p \sum_{m \neq l} \frac{1}{|m-l|^{j+p+1}} < \\ &< \frac{1}{4} \sum_{j=0,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j! (p-1)!} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{12} \sum_{j=0,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j! (p-1)!} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left( \frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p. \end{aligned}$$

Останній ряд збігається при  $a_{ls} + a_{ms} < h / \sqrt{v_s}$ .

Чисельні результати для всіх розглянутих конфігурацій отримано для матеріалу простору, яким є пісковик з пружними константами  $c_{11} = 5.8576 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{12} = 2.5019 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{13} = 2.0793 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{33} = 6.1105 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{44} = 1.6584 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ . Для нього корені рівняння (2.15) дорівнюють  $v_1 = 0.52$ ,  $v_2 = 2.01$ .

На рисунку 5.2 зображено розподіл напружень  $\sigma_z / \sigma$  у площині тріщини поза її межею в залежності від відносного розміру тріщини у представницькому

шарі. На цьому рисунку та на всіх інших лінії, позначеної  $\sigma^*$ , відповідає розподіл напружень для однієї тріщини у всьому просторі. Її наведено для порівняння, оскільки задача для однієї тріщини має точний розв'язок у замкненому вигляді

$$\sigma_z(\rho, 0) / \sigma_{|\rho>a} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{\rho}\right).$$

Зауважимо, що таке напруження не залежить від пружних сталих матеріалу простору і має той же вид, що і для ізотропного простору.

Графіки на рисунку 5.2 показують, що періодична система тріщин зменшує нормальне навантаження в площині кожної тріщини по відношенню до однієї тріщини, причому чим більше відносний розмір тріщини (при фіксованому  $a$  зменшується висота шару  $2h$ ), тим менше напруження. Подібним чином поведуть себе коефіцієнти інтенсивності напружень (таблиця 5.1). Для конфігурації 1 їх можна обчислити за формулою

$$K_{1z} = \lim_{\rho \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(\rho - a)} \sigma_z(\rho, 0) = \sigma \sqrt{\pi a} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,n}.$$

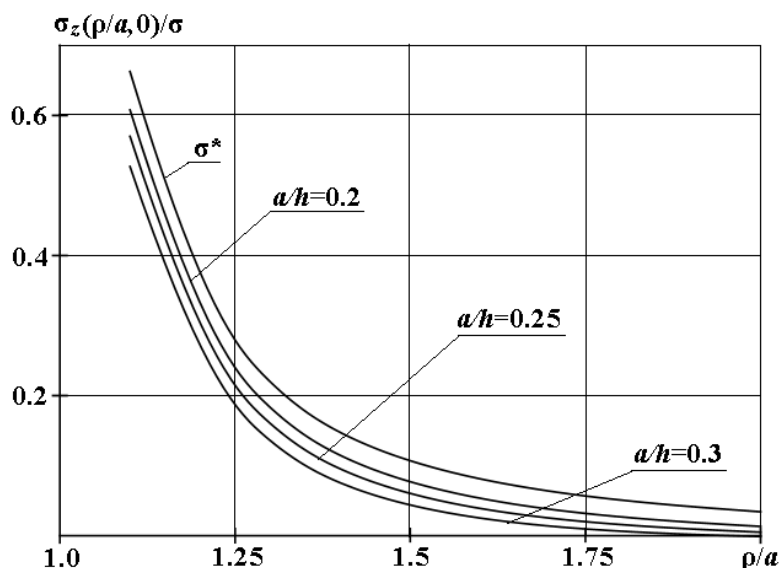


Рисунок 5.2 – Розподіл напружень  $\sigma_z / \sigma$  в залежності від відносного розміру тріщини. Конфігурація 1

У таблиці 5.1 наведено залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від параметра  $a/h$ . Тут значенню  $a/h = 0.0$  відповідає граничний випадок  $h \rightarrow \infty$ , тобто одна тріщина у просторі.

Таблиця 5.1 – Залежність КІН від розмірів тріщин. Конфігурація 1

$a/h$	0.0	0.1	0.2	0.25	0.3
$K_{1z} / (\sigma\sqrt{a})$	1.128	1.123	1.089	1.061	1.029

### 5.3.2 Конфігурація 2

Розглянемо іншу конфігурацію тріщин у представницькому шарі (рисунок 5.3). Позначимо її умовно  $a_0 - a_1 - a_0 - a_1$ .

Розв'язок задачі (2.8) – (2.9) для конфігурації 2 має вигляд (5.2), в якому

$$A_{s,n}^{(2l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{2l+j} = a_j, \quad j = 0, 1; \quad l = -\infty \div \infty.$$

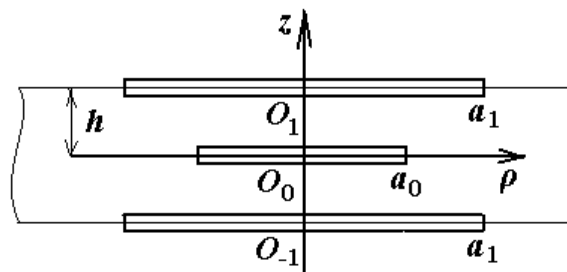


Рисунок 5.3 – Представницький шар. Конфігурація 2

Розв'язувальна система тут записується так:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = \frac{2}{\pi} \delta_{n,1};$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = 0$$

$$n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1.$$



Доведення фредгольмовості оператора системи аналогічно доведенню теореми 5.1, тому тут і далі не наводиться.

Результати розрахунків наведено в таблиці 5.2 і на рисунку 5.4.

Таблиця 5.2 – Залежність КІН від розмірів тріщин. Конфігурація 2

$(a_0 / h, a_1 / h)$	(0.1, 0.3)	(0.4, 0.2)	(0.5, 0.1)
$K_{1z} / (\sqrt{a_0} \sigma), z = 0$	1.013	1.071	1.060
$K_{1z} / (\sqrt{a_1} \sigma), z = h$	1.107	0.912	0.752

Різні за розміром тріщини у представницькому шарі вже впливають одна на одну при обчисленні коефіцієнтів інтенсивності і розподілу напружень в околі тріщин. Менша за розміром тріщина збільшує КІН більшої тріщини і навпаки, більша – зменшує КІН меншої. Подібна ситуація спостерігається і з напруженнями. Крім того, в площині меншої тріщини з'являється область стискаючих напружень.

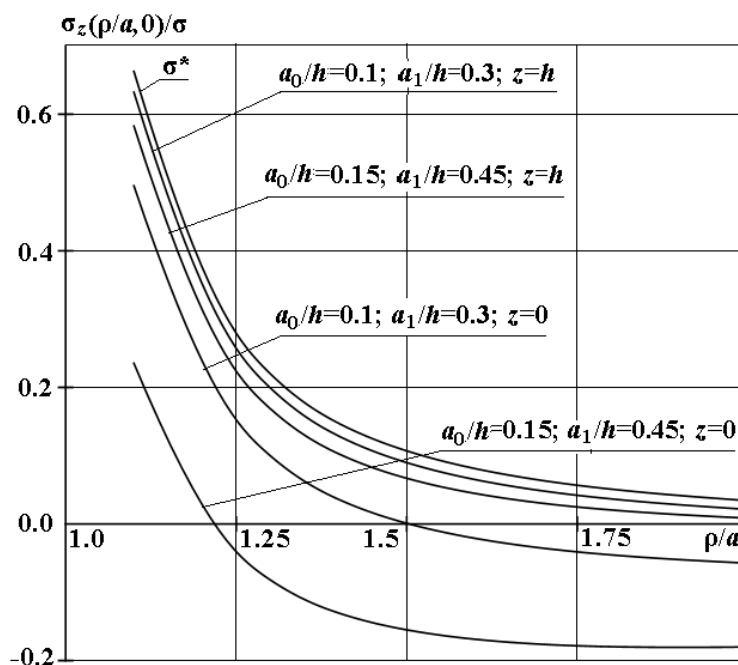


Рисунок 5.4 – Розподіл напружень  $\sigma_z / \sigma$  в залежності від відносного розміру тріщини. Конфігурація 2

### 5.3.3 Конфігурація 3

З двома різними за розмірами тріщинами можна утворити ще одну конфігурацію, представницький шар якої зображено на рисунку 5.5. Позначимо її умовно  $a_0 - a_1 - a_1 - a_0$ .

Розв'язок задачі (2.8) – (2.9) для конфігурації 3 має вигляд (5.2), в якому

$$A_{s,n}^{(3l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{3l+j} = a_j, \quad j = 0 \div 2, \quad l = -\infty \div \infty, \quad a_{-1} = a_1.$$

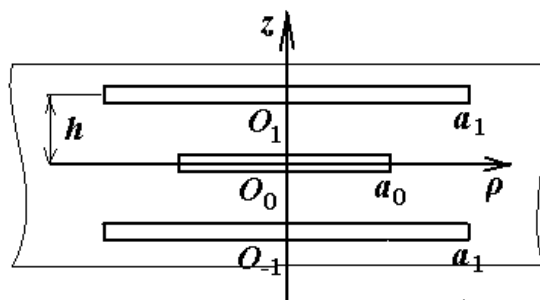


Рисунок 5.5 – Представницький шар. Конфігурація 3

Розв'язувальна система для цієї задачі така:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 3m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,3m+j,l} \right] = \frac{2}{\pi} \delta_{n,1};$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 3m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,3m+j,l} \right] = 0;$$

$$n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1, 2.$$

Результати розрахунків наведено в таблиці 5.3 і на рисунку 5.6.

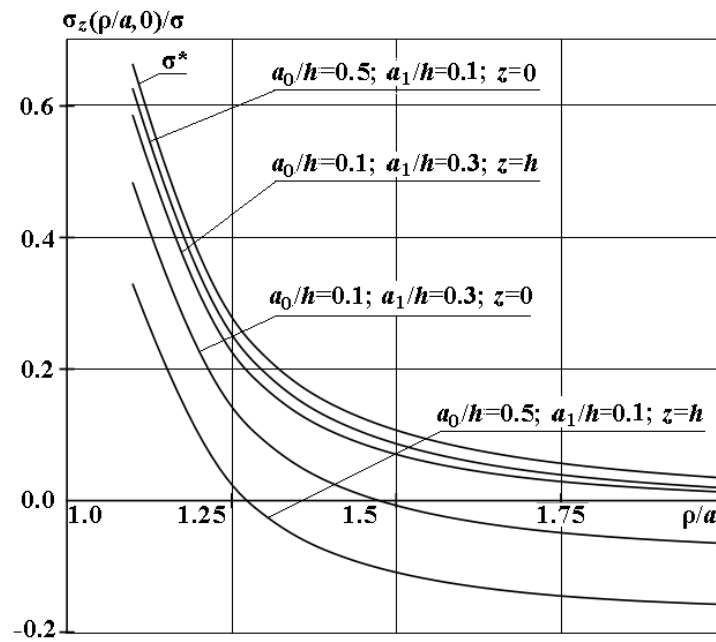


Рисунок 5.6 – Розподіл напружень  $\sigma_z / \sigma$  в залежності від відносного розміру тріщини. Конфігурація 3

При однакових розмірах тріщин двох останніх конфігурацій КІН і напруження в площині  $z=0$  мало відрізняються один від одного. Різницю можна помітити на площині  $z=h$ , де взаємодіють тріщини  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$

Таблиця 5.3 – Залежність КІН від розмірів тріщин. Конфігурація 3

$(a_0 / h, a_1 / h)$	(0.1, 0.3)	(0.4, 0.2)	(0.5, 0.1)
$K_{1z} / (\sqrt{a_0} \sigma), z=0$	1.005	1.092	1.102
$K_{1z} / (\sqrt{a_1} \sigma), z=h$	1.071	0.988	0.901

#### 5.3.4 Конфігурації 4 та 5

Тепер розглянемо конфігурації з трьома різними тріщинами. Представницький шар для першої з них зображено на рисунку 5.7. Позначимо її умовно  $a_0 - a_1 - a_2 - a_1 - a_0$ .

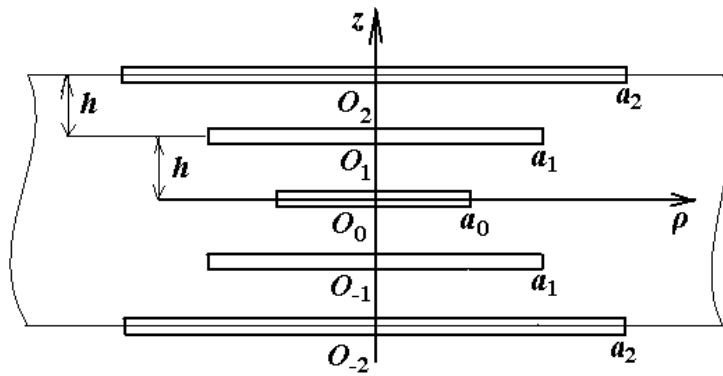


Рисунок 5.7 – Представницький шар. Конфігурація 4

Розв'язок задачі (2.8) – (2.9) для конфігурації 4 має вигляд (5.2), в якому

$$A_{s,n}^{(4l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{4l+j} = a_j, \quad j = 0 \div 3, \quad l = -\infty \div \infty, \quad a_1 = a_{-1}, \quad a_2 = a_{-2}.$$

Розв'язувальна система для цієї задачі така:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = \frac{2}{\pi} \delta_{n,1};$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = 0;$$

$$n = 1 \div \infty, \quad l = 0 \div 3.$$

Результати розрахунків наведено в таблиці 5.4 і на рисунку 5.8.

Для повноти аналізу наведемо також результати розрахунків КІН для конфігурації 5 ( $a_0 - a_1 - a_2 - a_2 - a_1 - a_0$ ), рисунок 5.9. Графіки напружень для цієї конфігурації мало відрізняються від зображених на рисунку 5.8, тому не представлені.

Таблиця 5.4 – Залежність КІН від розмірів тріщин. Конфігурація 4

$(a_0 / h, a_1 / h, a_2 / h)$	(0.1, 0.3, 0.2)	(0.4, 0.2, 0.3)	(0.5, 0.1, 0.3)
$K_{1z} / (\sqrt{a_0} \sigma), z = 0$	1.010	1.089	1.103
$K_{1z} / (\sqrt{a_1} \sigma), z = h$	1.095	0.966	0.877
$K_{1z} / (\sqrt{a_2} \sigma), z = 2h$	1.023	1.066	1.056

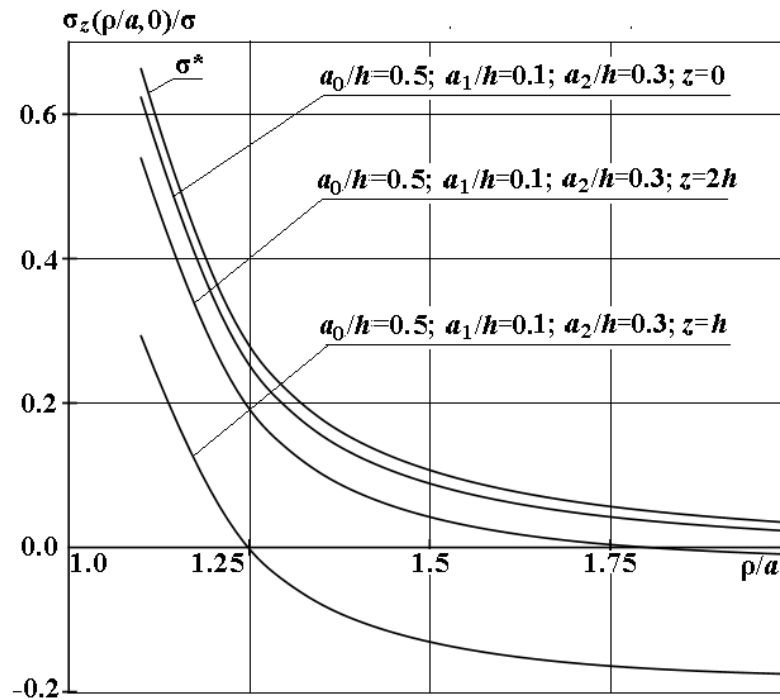


Рисунок 5.8 – Розподіл напружень  $\sigma_z / \sigma$  в залежності від відносного розміру тріщини. Конфігурація 4

За результатами чисельних розрахунків можна зробити певні висновки. Для всіх розглянутих конфігурацій найбільший КІН відповідає найбільшій за розміром тріщині. Чим більша тріщина розташована біля даної, тим більше вона розвантажує дану тріщину. Навпаки, чим менша тріщина розташована біля даної, тим більше навантажена дана. Порівняння коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних конфігурацій показує, що для тріщин однакового розміру вони мало залежать від конкретної конфігурації. Винятком є КІН тріщин, розташованих на або біля межі представницького шару (таблиці 5.2 і 5.3,  $z = h$ , таблиці 5.4 і 5.5,  $z = 2h$ ).

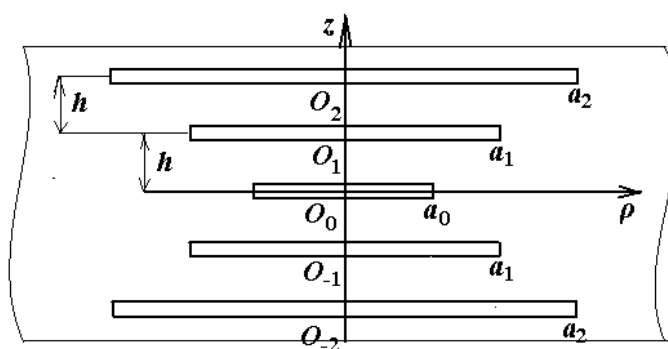


Рисунок 5.9 – Представницький шар. Конфігурація 5

Таблиця 5.5 – Залежність КІН від розмірів тріщин. Конфігурація 5

$(a_0 / h, a_1 / h, a_2 / h)$	(0.1, 0.3 0.2)	(0.4, 0.2, 0.3)	(0.5, 0.1, 0.3)
$K_{1z} / (\sqrt{a_0} \sigma), z = 0$	1.012	1.088	1.102
$K_{1z} / (\sqrt{a_1} \sigma), z = h$	1.099	0.964	0.877
$K_{1z} / (\sqrt{a_2} \sigma), z = 2h$	1.051	1.049	1.039

## Висновок до розділу

В роботі вперше (крім звичайного періодичного випадку) досліджується напружений стан трансверсально-ізотропного простору, послабленого періодичними системами плоских кругових тріщин, центри яких знаходяться на осі анізотропії, а їх площини їй перпендикулярні. Вважається, що всі тріщини знаходяться під сталим нормальним навантаженням. Кожна періодична система визначається представницьким шаром, площини якого перпендикулярні осі анізотропії, і який містить скінченну систему тріщин різних розмірів. Така система утворює певну конфігурацію. В конкретну конфігурацію може входити будь-яка непарна кількість тріщин довільного розміру, але при певних обмеженнях: тріщини симетричні відносно серединної площини шару, їх розміри задовольняють деяку умову збіжності. Наведені обмеження забезпечують практично однорідні умови відносно  $\tau_{\rho z}$  і  $V_z$  на межах представницького шару (порядок значень цих величин

знаходиться в діапазоні  $10^{-10} \div 10^{-14}$ ), які і можна вважати умовами на нескінченності. Усі задачі розв'язувалися узагальненим методом Фур'є (УМФ), який дозволив їх звести до нескінченних алгебраїчних систем з фредгольмовими операторами. Результати дослідження спиралися також на широкий комп'ютерний експеримент, в межах якого обчислювалися розподіли напружень не тільки в періодичних задачах, а ще й в неперіодичних, утворених кількома представницькими шарами. Порівняння результатів показало, що напруження в околі тріщин серединного шару при наявності симетрично розташованих відносно нього 5 – 7 шарів (в залежності від кількості тріщин у шарі) мають 1 – 2 вірні значущі цифри після точки по відношенню до періодичної задачі. Для КІН подібне порівняння дає 2 – 3 вірні цифри. Практична перевірка збіжності методу редукції показала високу ефективність УМФ. Так подвоєння параметра редукції від 10 до 20 привело до стабілізації 8-12 значущих цифр в отриманих результатах.

Подальші дослідження в цьому напрямку можуть бути пов'язані з аналізом напружень в періодичних задачах з більш складними умовами навантаження тріщин.

## РОЗДІЛ 6

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ  
З ПЕРІОДИЧНИМИ ПАКЕТАМИ АНТИТРІЩИН

## 6.1 Загальна постановка задачі

Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір із нескінченною системою одновісних паралельних плоских кругових антитріщин.  $\{\Gamma_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ . Позначимо центри антитріщин  $\{O_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ , відстань між ними  $h$  ( $h > 0$ ), радіуси антитріщин  $a_l$ . Припустимо, що вісь анізотропії трансверсально-ізотропного простору проходить через центри антитріщин. Зафіксуємо в просторі декартову систему координат  $(x, y, z)$  а циліндричну систему  $(\rho, \varphi, z)$  пов'язану з нею, так, щоб точка  $O_0$  була спільним початком координат, а вісь  $Oz$  мала напрямний вектор  $\overrightarrow{O_0O_1}$ .

Розглянемо задачу визначення напруженого стану зазначеного простору в разі, коли на нескінченності прикладено постійне двовісне стискаюче напруження. Задача зводиться до розв'язання крайової задачі для системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла (2.8), (2.9), де

$$(x, y, z) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_l.$$

Граничні умови на поверхнях антитріщин і на нескінченності мають такий вигляд:

$$\vec{V}(x, y, z)|_{(x, y, z) \in \Gamma_l} = 0, \quad l = -\infty, \infty, \quad \sigma_{\rho}^{\infty} = -\sigma, \quad \tau_{\rho\varphi}^{\infty} = 0, \quad \tau_{\rho z}^{\infty} = 0. \quad (6.1)$$

Для побудови частинних розв'язків системи рівнянь (2.8), (2.9), які відповідають геометрії області  $\Omega$ , із кожною точкою  $O_l$  пов'яжемо спрямовану відповідно до координатної системи  $Oxyz$  локальну декартову координатну систему  $(x_l, y_l, z_l)$ , а також дві декартові  $\{(x_{ls}, y_{ls}, z_{ls})\}_{s=1}^2$  та дві стиснуті



сфероїдальні  $\{(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}, \varphi)\}_{s=1}^2$  координатні системи так, що відповідають умові (2.17).

Де  $c_s$  параметр сфероїдальної системи, який збігається з радіусом відповідної антитріщини, рівняння  $l$ -ої поверхні тріщини  $\tilde{\xi}_{ls} = 0$ .

Зі співвідношень між координатами випливає, що рівності  $\tilde{\eta}_{l1} = \tilde{\eta}_{l2} = \tilde{\eta}_l$  виконуються на поверхні  $l$ -ї антитріщини.

## 6.2 Побудова розв'язку задачі в загальній постановці

Будемо шукати розв'язок задачі (2.8) – (2.9) з регулярними умовами при  $\rho \rightarrow \infty$  у вигляді

$$\vec{V}(x, y, z) = \vec{V}_0(x, y, z) + \sum_{s=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}), \quad (6.2)$$

де  $A_{s,n}^{(l)}$  – невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти в процесі розв'язання задачі,  $\vec{V}_0(x, y, z)$  – переміщення, яке задовольняє умови на нескінченності.

Ми знаходимо векторну функцію  $\vec{V}_0$  як розв'язок системи рівнянь (2.8), (2.9) у вигляді  $\vec{V}_0 = B\rho\vec{e}_\rho$ . Тоді, при  $B = -\sigma / (c_{11} + c_{12})$ , переміщення  $\vec{V}_0$  задає рівномірний напружений стан у просторі, що відповідає граничним умовам на нескінченності (6.1).

Перетворимо вектор переміщень (6.2) за допомогою формули (2.121) до кожної окремої системи координат. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_l, y_l, z_l) = & Ba_l \text{ch} \tilde{\xi}_{l,s} \sin \tilde{\eta}_{l,s} \vec{e}_\rho + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) + \\ & + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) \sum_{m \neq l}^{\infty} \omega_{n,k}^{m,l} A_{s,k}^{(m)} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Після переходу в формулі (6.3) від переміщень до напружень на поверхні  $\Gamma_l$  і виконання граничних умов (6.1) отримаємо розв'язувальну систему:

$$\sum_{s=1}^2 \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{0,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 0 \div \infty, \quad l = -\infty \div \infty, \quad (6.4)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{1,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = 0, \quad n = 0 \div \infty, \quad l = -\infty \div \infty, \quad (6.5)$$

де

$$t_{0,n,k}^{s,m,l} = i^n \frac{2}{\pi} \frac{a_m}{a_l} \sin(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s}, \quad t_{1,n,k}^{s,m,l} = i^{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{a_m}{a_l} \cos(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s};$$

$$A_{s,n}^{(l)} = B a_l \tilde{A}_{s,n}^{(l)}, \quad h_{m,l,n,k}^{(66)s} = \omega_{n,k}^{m,l} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}),$$

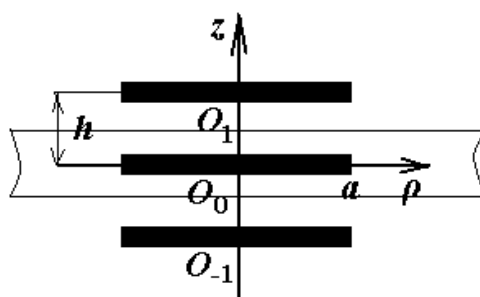
$\delta_{n,k}$  – дельта символ Кронекера.

Зауважимо, що при  $n=0$  система (6.4) – (6.5) задовольняється при  $\tilde{A}_{s,n}^{(l)} = 0$  ( $s=1, 2$ ), що є необхідною умовою регулярності розв'язку (6.2).

### 6.3 Розв'язання задач з періодичною системою антитріщин

#### 6.3.1 Конфігурація 1

Розглянемо систему однакових антитріщин (конфігурація 1). Представницький шар для такої системи зображено на рисунку 6.1.



Рисунку 6.1 – Представницький шар. Конфігурація 1

Оскільки задача є періодичною, то невідомі коефіцієнти  $\tilde{A}_{s,n}^{(l)}$  не повинні залежати від індексу  $l$ . Тоді систему (6.4), (6.5) можна переписати у такому вигляді:

$$\sum_{s=1}^2 \left[ \tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{0,n,k}^{s,m,0} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \quad (6.6)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{1,n,k}^{s,m,0} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty. \quad (6.7)$$

**Теорема 6.1.** При виконанні умови  $a_{ls} + a_{ms} < h / \sqrt{v_s}$ ,  $l \neq m$ ,  $s = 1, 2$  оператор системи (6.6), (6.7) є фредгольмовим оператором у гільбертовому просторі  $l_2 \times l_2$ .

Доведення теореми 6.1 аналогічно доведенню теореми 5.1.

Розв'язок системи був використаний для визначення розподілу напруг у зоні її максимальної концентрації — в площині антитріщин за межами її границі. Були отримані наступні формули для напруги  $\sigma_z$  а коефіцієнта інтенсивності напруги (КІН):  $K_{Iz}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44}) = & -2 \frac{c_{13}}{c_{44}} - \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,n} \left\{ \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(\text{sh}^2 \tilde{\xi}_{sm} + \cos^2 \tilde{\eta}_{sm})} \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \text{sh} \tilde{\xi}_{sm} \sin \tilde{\eta}_{sm} Q_n(i \text{sh} \tilde{\xi}_{sm}) P_n^1(\cos \tilde{\eta}_{sm}) - \text{ch} \tilde{\xi}_{sm} \cos \tilde{\eta}_{sm} Q_n^1(i \text{sh} \tilde{\xi}_{sm}) P_n(\cos \tilde{\eta}_{sm}) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{\text{sh} \tilde{\xi}_{s0}} Q_n(i \text{sh} \tilde{\xi}_{s0}) P_n^1(0) \right\} \\ K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44} \sigma \sqrt{a}) = & -\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{s,2n+1}. \end{aligned}$$

Чисельні результати для всіх розглянутих конфігурацій отримано для матеріалу простору, яким є пісковик з пружними константами  $c_{11} = 5.8576 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{12} = 2.5019 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{13} = 2.0793 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{33} = 6.1105 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{44} = 1.6584 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ . Для нього корені рівняння (2.15) дорівнюють  $v_1 = 0.52$ ,  $v_2 = 2.01$ .

На рисунку 6.3 зображено розподіл напружень у площині антитріщини поза її межею в залежності від відносного розміру антитріщини у представницькому шарі. Зі зменшенням відносного розміру антитріщини величина напруги зменшується, і в біля межі антитріщини спостерігається зміна знака напруги (точка зміни знака не показана на графіку через її близькість до межі). На цьому рисунку і на всіх інших вказано розподіл напруги для однієї антитріщини в усьому просторі. Це надано для порівняння, оскільки задача для однієї антитріщини має точне розв'язання в замкнутій формі.

$$\begin{aligned} \sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44}) = \\ = -2 \frac{c_{13}}{c_{44}} - \frac{4}{\pi} \frac{k_1(k_2 + 1)\sqrt{v_2} - k_2(k_1 + 1)\sqrt{v_1}}{k_2\sqrt{v_1} - k_1\sqrt{v_2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\rho/a)^2 - 1}} - \arcsin(a/\rho) \right], \\ K_{1z}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma) = -\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \frac{k_1(k_2 + 1)\sqrt{v_2} - k_2(k_1 + 1)\sqrt{v_1}}{k_2\sqrt{v_1} - k_1\sqrt{v_2}}. \end{aligned}$$

Таблиця 6.1 – Залежність КІН від розмірів антитріщин. Конфігурація 1

$a/h$	0.0	0.1	0.2	0.3
$K_{1z}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma)$	1.1529	1.1534	1.564	1.1609

Найменше значення напруги відповідає одній антитріщині в просторі. Це природно, оскільки одна антитріщина є граничним випадком конфігурації 1, коли  $a$  фіксоване і  $h \rightarrow \infty$ . Коефіцієнт інтенсивності напруги має подібну природу зміни. У таблиці 6.1 наведено залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від параметра  $a/h$ . Тут значенню  $a/h = 0.0$  відповідає граничний випадок  $h \rightarrow \infty$ , тобто одна антитріщина у просторі.

### 6.3.2 Конфігурація 2

Розглянемо іншу конфігурацію антитріщин у представницькому шарі (рисунок 6.2). Позначимо її умовно  $a_0 - a_1 - a_0 - a_1$ .

Розв'язок задачі (2.8) – (2.9) для конфігурації 2 має вигляд (6.2), в якому

$$A_{s,n}^{(2l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{2l+j} = a_j, \quad j = 0, 1; \quad l = -\infty \div \infty.$$

Розв'язувальна система тут записується так:

$$\sum_{s=1}^2 \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1, \quad (6.8)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1. \quad (6.9)$$

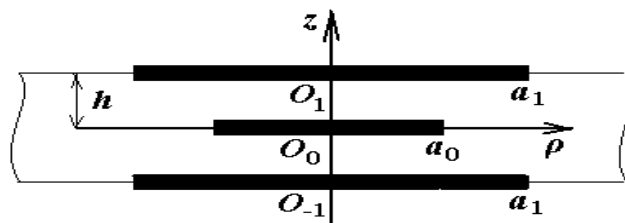


Рисунок 6.2 – Представницький шар. Конфігурація 2

Доведення фредгольмовості оператора системи (6.8), (6.9) аналогічно доведенню теореми 5.1, тому тут і далі не наводиться. Результати розрахунків наведено в таблиці 6.2 і на рисунку 6.4.

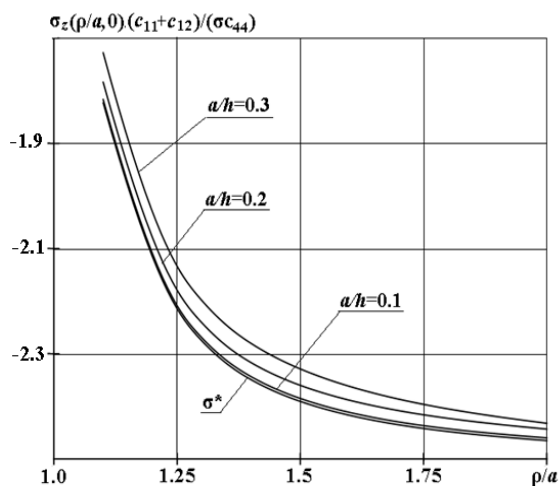


Рисунок 6.3 – Розподіл напружень  $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44})$  в залежності від відносного розміру антитріщини. Конфігурація 1

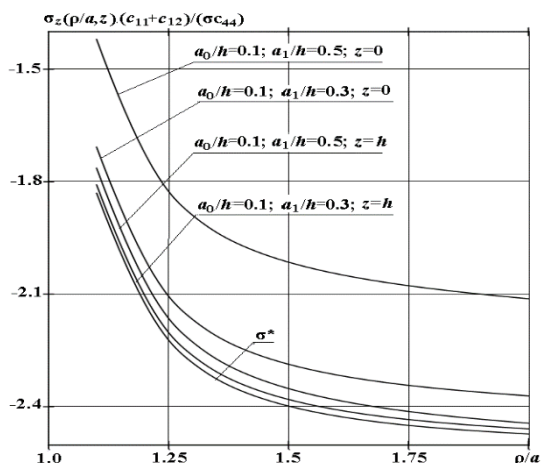


Рисунок 6.4 – Розподіл напружень  $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44})$  в залежності від відносного розміру антитріщини. Конфігурація 2

Різні за розміром антитріщини у представницькому шарі вже впливають одна на одну при обчисленні коефіцієнтів інтенсивності і розподілу напружень в околі антитріщин. Збільшення розміру більшої антитріщини при фіксованому розмірі меншої веде до збільшення коефіцієнта інтенсивності напруги в околі меншої антитріщини. І навпаки, збільшення розміру меншої антитріщини при фіксованому розмірі більшої веде до зменшення КІН в околі більшої антитріщини. Ті ж самі закономірності спостерігаються в розподілах нормальних напруг у площинах антитріщин поза їх меж.

Таблиця 6.2 – Залежність КІН від розмірів антитріщин. Конфігурація 2

$(a_0 / h, a_1 / h)$	(0.1, 0.3)	(0.2, 0.4)	(0.1, 0.5)
$K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma), z = 0$	1.1630	1.1692	1.1785
$K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma), z = h$	1.1549	1.1577	1.1587

### 6.3.3 Конфігурація 3

Тепер розглянемо конфігурації з трьома різними тріщинами. Представницький шар для першої з них зображено на рисунку 6.5. Позначимо її умовно  $a_0 - a_1 - a_2 - a_1 - a_0$ .

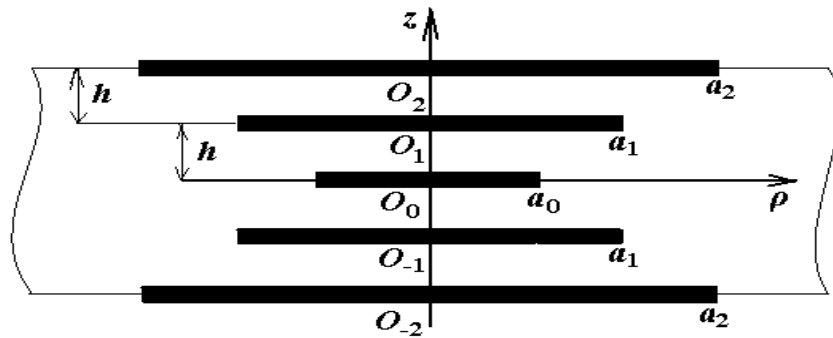


Рисунок 6.5 – Представницький шар. Конфігурація 3

Розв'язок задачі (2.8) – (2.9) для конфігурації 4 має вигляд (6.2), в якому

$$A_{s,n}^{(4l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{4l+j} = a_j, \quad j = 0 \div 3, \quad l = -\infty \div \infty, \quad a_1 = a_{-1}, \quad a_2 = a_{-2}.$$

Розв'язувальна система для цієї задачі така:

$$\sum_{s=1}^2 \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0 \div 3, \quad (6.10)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \left[ \tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0 \div 3. \quad (6.11)$$

Результати розрахунків наведено в таблиці 6.3 і на рисунку 6.6 та на рисунку 6.7.

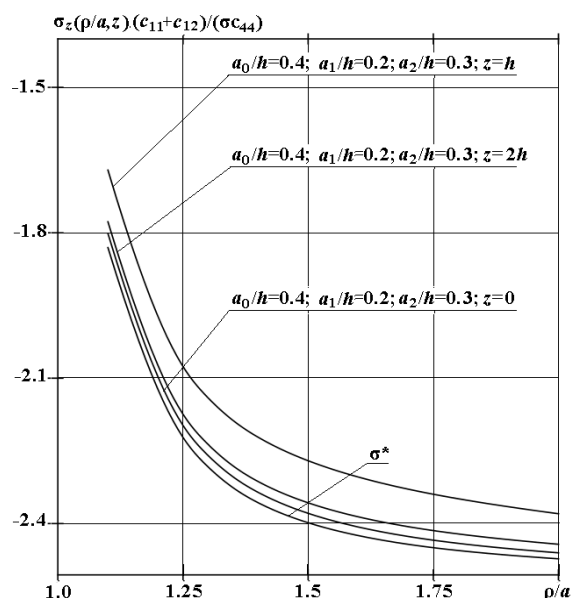


Рисунок 6.6 – Розподіл напружень  $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44})$  в залежності від відносного розміру антитріщини. Конфігурація 3

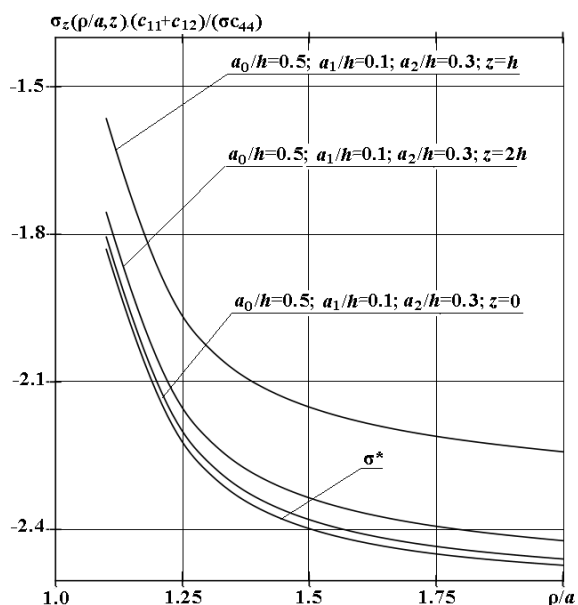


Рисунок 6.7 – Розподіл напружень  $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44})$  в залежності від відносного розміру антитріщини. Конфігурація 3

Для кожного пакету антитріщин конфігурації 3 найвищий коефіцієнт інтенсивності напруги спостерігається на межі найменшої антитріщини, і зі збільшенням розміру сусідніх антитріщин цей КІН збільшується. Подібні закономірності були отримані в розподілі напруг  $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44})$  у



площинах менших антитріщин за межами їх кордонів у пакеті з більшими антитріщинами.

Таблиця 6.3 – Залежність КІН від розмірів антитріщин. Конфігурація 3

$(a_0 / h, a_1 / h, a_2 / h)$	(0.2, 0.1, 0.3)	(0.4, 0.2, 0.3)	(0.5, 0.1, 0.3)
$K_{1z}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma), z = 0$	1.1549	1.1561	1.1551
$K_{1z}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma), z = h$	1.1597	1.1656	1.1707
$K_{1z}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44}\sigma), z = 2h$	1.1539	1.1586	1.1594

### Висновок до розділу

У роботі вперше досліджено напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного простору з періодичними пакетами плоских кругових антитріщин, центри яких розташовані на осі анізотропії, а площини перпендикулярні до неї. Вважається, що простір знаходиться під дією постійної двовісної стискаючої напруги, прикладеної на нескінченності. Періодична система (пакет) антитріщин визначається представницьким шаром з площинами, перпендикулярними до осі анізотропії, і містить антитріщини різного розміру. Такий пакет утворює певну конфігурацію. У конкретну конфігурацію можна включити будь-яку непарну кількість антитріщин довільного розміру з дотриманням таких обмежень: антитріщини симетричні відносно середньої площини шару, їх розміри задовольняють умовам збіжності методу. Встановлені обмеження забезпечують практично однакові умови для дотичних напружень і нормальних переміщень на межі представницького шару (порядок цих величин знаходиться в діапазоні  $10^{-10} \div 10^{-14}$ ), які можна розглядати як умови на нескінченності. Усі задачі розв'язувалися узагальненим методом Фур'є, що дозволило звести їх до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь з операторами Фредгольма. Практична перевірка ефективності методу редукції показала високу ефективність узагальненого методу Фур'є. Таким чином, збільшення параметра редукції з 10 до

20 призвело до стабілізації 8-14 значущих цифр в отриманих результатах. Порівняння коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних конфігурацій показує, що для антитріщин однакового розміру їх значення мало залежать від конкретної конфігурації. Один із паралельних напрямків дослідження подібних проблем пов'язаний з періодичними пакетами тріщин у трансверсально-ізотропному просторі. Ще одним перспективним напрямком досліджень є клас неосесиметричних задач з періодичними системами тріщин і антитріщин.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено комплексне аналітичне дослідження задач пружності для трансверсально-ізотропного середовища з наявністю окремих тріщин, періодичних систем тріщин та антитріщин. Отримані результати мають як фундаментальне, так і прикладне значення для механіки деформівного твердого тіла та композитних матеріалів.

1. Отримав подальший розвиток апарат узагальненого методу Фур'є, що полягає у наступному: вперше доведено базисність системи вісесиметричних розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною.

2. Отримано нижні оцінки модулів визначників розв'язувальних систем першої та другої крайових задач для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною, встановлення класів розв'язності цих задач звичайним методом Фур'є.

3. Отримано нові теореми додавання для вісесиметричних базисних стиснутих сфероїдальних розв'язків у випадку, коли початки систем координат довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

4. Вперше отримано параметричну модель напруженого стану трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі стиснутою сфероїдальною порожниною, на базі якої проведено комп'ютерне моделювання напруженого стану стиснутого сфероїду з круговою тріщиною.

5. Досліджено задачу про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з двома паралельними круговими тріщинами.

6. Вперше поставлено та розв'язано задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного простору з періодичними системами (пакетами) плоских кругових тріщин і антитріщин.

Практичне значення отриманих результатів полягає у створенні нових аналітичних методів параметричного моделювання і практично точного розрахунку напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропних

матеріалів з неоднорідностями, тріщинами і тонкими жорсткими включеннями. Результати дисертаційного дослідження мають значне практичне значення в контексті математичного моделювання пористих і композитних матеріалів, розрахунку міцності та інженерного аналізу елементів конструкцій з трансверсально-ізотропних матеріалів. Застосування отриманих аналітичних розв'язків дозволяє ефективно описувати розподіл напружень у зонах їх найбільшої концентрації, що є критично важливим для оцінки надійності та довговічності матеріалів і виробів.

Окремо треба зазначити, що узагальнений метод Фур'є в більшості розглянутих задач неможна замінити суто чисельними методами, зокрема методом скінченних елементів, оскільки ці методи стають малоефективними в задачах з декількома неоднорідностями, у періодичних задачах, при необхідності отримання результатів з великою точністю.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. – New York : McGraw-Hill, 1969. – 567 p.
2. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Philosophical Magazine. – 1921. – Vol. 41. – P. 744–764.
3. Goodier J.N. Concentration of Stress Around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws // J. Appl. Mech. – 1933. – Vol. 1, No. 2. – P. 39–44.
4. Ambartsumyan S.A. A refined theory of anisotropic shells. – Ohio : FOREIGN TECHNOLOGY DIV WRIGHT-PATTERSON AFB, 1969. – 10 p.
5. Ambartsumyan S.A. On an improved theory of anisotropic shells // Proceedings of the Seventh All-Union Conference on Theory of Shells and Plates. – Dnepropetrovsk, 1969.
6. Bower A.F. Applied Mechanics of Solids. – New York : CRC Press, 2009. – 820 p.
7. Bower A. F. The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks // Journal of Tribology. – 1988. – Vol. 110. – P. 704–711. – DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3261717>.
8. Bower A. F. Cyclic hardening properties of hard-drawn copper and rail steel // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1989. – Vol. 37, No. 4. – P. 455–470. – ISSN 0022-5096. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(89\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(89)90024-0).
9. Hashin Z. Analysis of composite materials – A survey // Journal of Applied Mechanics. – 1985. . – Vol. 4, No. 2. – P. 129–136.
10. Hashin Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites // Journal of Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 47, No. 2. – P. 329–334. – DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3153664>.
11. Boresi A. P., Schmidt R. J. Advanced Mechanics of Materials. – New York : John Wiley & Sons, 2003. – 704 p.

12. Boresi A. P., Schmidt R. J. Elasticity in Engineering Mechanics. – New York : John Wiley & Sons, 1993. – 615 p.
13. Boresi A. P., Chong K. P. Elasticity in Engineering Mechanics. – 2nd ed. – New York : Wiley, 2000. – 615 p.
14. Kachanov, M. Elastic solids with many cracks: A simple method of analysis // International Journal of Solids and Structures. – 1987. – Vol. 23, No. 1. – P. 23–43. – DOI: 10.1016/0020-7683(87)90030-8.
15. Kachanov M. Solids with cracks and non-spherical pores: proper parameters of defect density and effective elastic properties // International Journal of Fracture. – 1999. – Vol. 97. – P. 1–32. – DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1018345702490>.
16. Kachanov M. Effective Elastic Properties of Cracked Solids: Critical Review of Some Basic Concepts // Applied Mechanics Reviews. – 1992. – Vol. 45, No. 8. – P. 304–335. – DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3119761>.
17. Kachanov M. Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems // Advances in Applied Mechanics. – 1993. – Vol. 30. – P. 259–445. – ISSN 0065-2156. – ISBN 9780120020300. – DOI: [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70176-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70176-5).
18. Saada A. S. Elasticity: Theory and Applications. – Vol. 16. – Amsterdam : Elsevier, 2013. – 643 p.
19. Chou P. C., Pagano N. J. Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches. – New York : Courier Corporation, 1992. – 290 p.
20. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Vol. 50, No. 12. – P. 2509–2537. – ISSN 0022-5096. – DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9).
21. Tsai S. W. Introduction to Composite Materials. – London : Routledge, 2018. – 466 p.
22. Tsai S. W. Composites Design. – Vol. 5. – Dayton, OH : Think Composites, 1988. – 700 p.

23. Azzi V. D., Tsai S. W. Anisotropic strength of composites: Investigation aimed at developing a theory applicable to laminated as well as unidirectional composites // *Experimental Mechanics*. – 1965. – Vol. 5. – P. 283–288.
24. Liu H., Pan E. Indentation of a flat-ended cylinder over a transversely isotropic and layered half-space with imperfect interfaces // *Mechanics of Materials*. – 2018. – Vol. 118. – P. 62–73.
25. Griffith, A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1921. – Vol. 221. – P. 163–198. – DOI: [10.1098/rsta.1921.0006](https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006).
26. Irwin, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 1957. – Vol. 24, No. 3. – P. 361–364.
27. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The Stress Analysis of Cracks. – Handbook 34. – Del Research Corporation, 1973. 354 – p.
28. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 1957. – P. 361–364.
29. Irwin G. R. Crack-extension force for a part-through crack in a plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 1962. – Vol. 29, No. 4. – P. 651–654.
30. Erdogan, F., Sih, G. C. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear // *Journal of Basic Engineering*. – 1963. – Vol. 85, No. 4. – P. 519–527.
31. Delale, F., Erdogan, F. The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane // *Journal of Applied Mechanics*. – 1983. – Vol. 50, No. 3. – P. 609–614.
32. Delale F., Erdogan F. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap // *International Journal of Solids and Structures*. – 1979. – Vol. 15, No. 12. – P. 907–926.
33. Delale F., Erdogan F. Transverse shear effect in a circumferentially cracked cylindrical shell // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1979. – Vol. 37, No. 3. – P. 239–258.

34. Delale F., Erdogan F. The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 1979. – P. 618–624.
35. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – P. 379–386.
36. Rice J. R. Some remarks on elastic crack-tip stress fields // *International Journal of Solids and Structures*. – 1972. – Vol. 8, No. 6. – P. 751–758.
37. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // *Mechanics of Materials*. – 1988. – P. 98–103.
38. Rice, J. R. The Mechanics of Crack Tip Deformation and Extension by Fatigue // *ASTM Special Technical Publication*. – 1967. – No. 415. – P. 247–309.
39. Rice J. R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture // *Fracture: An Advanced Treatise*. – 1968. – Vol. 2. – P. 191–311.
40. Barenblatt G. I. The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture. General Ideas and Hypotheses. Axially-Symmetric Cracks // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1959. – Vol. 23, No. 3. – P. 622–636.
41. Barenblatt G. I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture // *Advances in Applied Mechanics*. – 1962. – Vol. 7. – P. 55–129.
42. Barenblatt G. I. Concerning Equilibrium Cracks Forming During Brittle Fracture. The Stability of Isolated Cracks. Relationships with Energetic Theories // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1959. – Vol. 23, No. 5. – P. 1273–1282.
43. Barenblatt G. I. Some General Aspects of Fracture Mechanics // In: *Modeling of Defects and Fracture Mechanics*. – Vienna : Springer Vienna, 1993. – P. 29–59.
44. Meyer C. R., Hutchinson J. W., Rice J. R. The Path-Independent M Integral Implies the Creep Closure of Englacial and Subglacial Channels // *Journal of Applied Mechanics*. – 2017. – Vol. 84, No. 1. – Art. 011006.



45. Hutchinson J. W. Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16, No. 1. – P. 13–31.
46. Hutchinson J. W. Crack Tip Shielding by Micro-Cracking in Brittle Solids // *Acta Metallurgica*. – 1987. – Vol. 35, No. 7. – P. 1605–1619.
47. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials // *Advances in Applied Mechanics*. – 1991. – Vol. 29. – P. 63–191.
48. Lekhnitskii S. G., Tsai S. W., Chéron Th. *Anisotropic Plates*. – Vol. 534. – New York : Gordon and Breach, 1968. – 550 p.
49. Lekhnitskii S. G. *Anisotropic Plates*. – 2nd ed. – New York : Gordon and Breach, 1968. – 534 p.
50. Lekhnitskii S. G., Fern P., Brandstatter J. J., Dill E. H. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body // *Physics Today*. – 1964. – Vol. 17, No. 1. – P. 84. – DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3051394>.
51. Sih G. C. A Review of the Three-Dimensional Stress Problem for a Cracked Plate // *International Journal of Fracture Mechanics*. – 1971. – Vol. 7, No. 1. – P. 39–61.
52. Sih G. C. *Handbook of Stress-Intensity Factors: Stress-Intensity Factor Solutions and Formulas for Reference*. – 1973.
53. Sih G. C., Cha B. C. K. A Fracture Criterion for Three-Dimensional Crack Problems // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1974. – Vol. 6, No. 4. – P. 699–723.
54. Sih G. C. (ed.). *Elastodynamic Crack Problems*. – Vol. 4. – Berlin : Springer, 1977. – 353 p.
55. Sih G. C. (ed.). *Plates and Shells with Cracks: A Collection of Stress Intensity Factor Solutions for Cracks in Plates and Shells*. – Vol. 3. – Berlin : Springer, 2012. – 302 p.
56. Sih G. C., Chen E. P. Dilatational and Distortional Behavior of Cracks in Magnetoelastic Materials // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – Vol. 40, No. 1. – P. 1–21.
57. Knott J. F. *Fundamentals of Fracture Mechanics*. – Gruppo Italiano Frattura, 1973. – 288 p.

58. Knott J. F. Local Approach Concepts and the Microstructures of Steels // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2008. – Vol. 75, No. 11. – P. 3560–3569.
59. Knott, J. F. Effects of Size Scale on Fracture Processes in Engineering Materials // In: Karihaloo, B. L., et al. (eds.) *IUTAM Symposium on Nonlinear Analysis of Fracture*. – Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. – P. 1–10.
60. Anderson, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. – 4th ed. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 675 p. – ISBN 978-1-4987-2813-3. – DOI: 10.1201/9781315370293.
61. Nairn J. A. Fracture Mechanics of Composites with Residual Stresses, Imperfect Interfaces, and Traction-Loaded Cracks // *Composites Science and Technology*. – 2001. – Vol. 61, No. 15. – P. 2159–2167.
62. Nairn J. A. The Strain Energy Release Rate of Composite Microcracking: A Variational Approach // *Journal of Composite Materials*. – 1989. – Vol. 23, No. 11. – P. 1106–1129.
63. Nairn J. A. Matrix Microcracking in Composites // *Polymer Matrix Composites*. – 2000. – Vol. 2. – P. 403–432.
64. Parihar K. S., Sowdamini S. Stress Distribution in a Two-Dimensional Infinite Anisotropic Medium with Collinear Cracks // *Journal of Elasticity*. – 1985. – Vol. 15, No. 2. – P. 193–214.
65. Rajapakse R. K. N. D., Wang Y. Green's Functions for Transversely Isotropic Elastic Half Space // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1993. – Vol. 119, No. 9. – P. 1724–1746.
66. Rajapakse R. K. N. D., Wang Y. Elastodynamic Green's Functions of Orthotropic Half Plane // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1991. – Vol. 117, No. 3. – P. 588–604.
67. Wang Y., Rajapakse R. K. N. D. Transient Fundamental Solutions for a Transversely Isotropic Elastic Half Space // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. – 1993. – Vol. 442, No. 1916. – P. 505–531.

68. Kryvyi O. F. Circular Interface Crack in the Inhomogeneous Transversely Isotropic Space // *Materials Science*. – 2012. – Vol. 47, No. 6. – P. 726–736. – DOI: 10.1007/s11003-012-9450-9.
69. Kryvyi O. F. Interface Crack in the Inhomogeneous Transversely Isotropic Space // *Materials Science*. – 2012. – Vol. 47, No. 6. – P. 726–736. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9450-9>.
70. Kryvyi O. F. The Solution Method of Nonaxisymmetric Problems of Stress Concentration for an Inhomogeneous Transversal Isotropic Space with Interfacial Cracks and Inclusions // *ICF 2017 – 14th International Conference on Fracture*. – 2017.
71. Kryvyi O. F. Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space // *Materials Science*. – 2014. – Vol. 50, No. 2. – P. 245–253. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7>.
72. Острик В.І., Улітко А.Ф. Тріщина на межі розподілу півплощин з різних матеріалів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.
73. Острик В.І., Улітко А.Ф. Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 21–26.
74. Острик В.І., Улітко А.Ф. Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2001. – Т. 44, № 3. – С. 88–95.
75. Острик В.І., Улітко А.Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.
76. Улітко А.Ф. Метод власних векторних функцій в просторових задачах теорії пружності. – К. : Наукова думка, 1979. – 264 с.
77. Кіт Г. С., Кривцун М. Г. Плоскі задачі термопружності для тіл з тріщинами. – К. : Наукова думка, 1983. – 280 с.
78. Кіт Г. С., Сушко О. П. Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюючим включенням (тріщиною) // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 58–70.

79. Кіт Г. С., Черняк М. С. Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та тріщинами (плоска деформація) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 30–37.

80. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р. Напружений стан неоднорідної пластини з тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 83–97.

81. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів : Сполом, 2003. – 320 с.

82. Осадчук В., Кушнір Р., Николишин М. Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною // Машинознавство. – 1998. – № 4/5. – С. 40–43.

83. Панасюк В. В., Теплий М. Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К. : Наукова думка, 1975. – 195 с.

84. Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаємодія жорстких лінійних включень та тріщин у деформованому тілі. – К. : Наукова думка, 1983. – 288 с.

85. Панасюк В. В., Андрейків О. Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 636–639.

86. Панасюк В. В., Андрейків О. Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 636–639.

87. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук І. В. Чисельний аналіз у плоских задачах теорії тріщин. – К. : Наукова думка, 1989. – 248 с.

88. Саврук М. П. Двовимірні задачі пружності для тіл з тріщинами. – К. : Наукова думка, 1988. – 324 с.

89. Саврук М. П. Коефіцієнти інтенсивності напруг у тілах із тріщинами: довідковий посібник. Механіка руйнування та міцність матеріалів. – Т. 2. – К. : Наукова думка, 1998. – 620 с.

90. Сулим Г. Т. Застосування формули Сомільяна в задачах теорії пружності для тіл з тонкостінними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1983. – Вип. 18. – С. 48–51.

91. Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів : монографія. – У 2-х т. – Луцьк : Надстир'я, 2007.
92. Сулим Г. Т. Концентрація напруг біля тонкостінних лінійних включень // Прикл. механіка. – 1981. – Т. 17, № 11. – С. 82–89.
93. Сулим Г., Пастернак Я. Регуляризована тотожність Сомільяна для задач теорії пружності з тонкостінними структурами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 142–150.
94. Сулим Г. Т., Шевчук С. П. Плоска задача для кусково-однорідного анізотропного тіла зі стрічковим пружним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 7–16.
95. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 136–144.
96. Sulim G. T., Piskozub J. Z. Thermoelastic Equilibrium of Piecewise Homogeneous Solids with Thin Inclusions // Journal of Engineering Mathematics. – 2008. – Vol. 61. – P. 315–337.
97. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Двовимірні зв'язані електричні, магнітні та механічні поля в діелектриках із тріщинами та тонкими включеннями // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 71–85.
98. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії пружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
99. Choi H. J. A Periodic Array of Cracks in a Functionally Graded Nonhomogeneous Medium Loaded Under In-Plane Normal and Shear // International Journal of Fracture. – 1997. – Vol. 88. – P. 107–128.
100. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк : ЛДТУ, 2003. – 228 с.
101. Chen Y. Z. Periodic Rigid Line Problem in an Infinite Plate // Archive of Applied Mechanics. – 1993. – Vol. 63, No. 7. – P. 464–471.

102. Chen Y. Z., Hasebe N., Lee K. Y. Multiple Crack Problems in Elasticity. – Southampton : WIT Press, 2003. – 356 p.
103. Newman J. C. Jr., Raju I. S. Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies // ASTM Natl. Symp. on Fracture Mech. – NASA-TM-83200. – 1981. – 288 p.
104. Solanki K., Daniewicz S. R., Newman J. C. Jr. Finite Element Analysis of Plasticity-Induced Fatigue Crack Closure: An Overview // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – Vol. 71, No. 2. – P. 149–171.
105. Raju I. S., Newman J. C. Jr. Stress-Intensity Factors for Internal and External Surface Cracks in Cylindrical Vessels. – 1982. – P. 29.
106. Raju I. S., Newman J. C. Jr. Three Dimensional Finite-Element Analysis of Finite-Thickness Fracture Specimens. – NASA-TN-D-8414. – 1977.
107. Newman J. C. Jr., Raju I. S. An Empirical Stress-Intensity Factor Equation for the Surface Crack // Engineering Fracture Mechanics. – 1981. – Vol. 15, No. 1–2. – P. 185–192.
108. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolyshyn M. M. Methods for the Determination of Static and Dynamic Stresses in Bodies with Subsurface Cracks // Materials Science. – 2011. – Vol. 47. – P. 177–187. – DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
109. Bogdanov V. L. On a Circular Shear Crack in a Semi-Infinite Composite with Initial Stresses // Materials Science. – 2007. – Vol. 43. – P. 321–330. – DOI: 10.1007/s11003-007-0037-9.
110. Davidson S. Boundary Value Problems in Elasticity and Thermoelasticity : Doctor of Philosophy Dissertation. – Old Dominion University, 1990. – 105 p. – DOI: 10.25777/wzrb-7781.
111. Shivay O. N., Mukhopadhyay S. On the Solution of a Problem of Extended Thermoelasticity Theory (ETE) by Using a Complete Finite Element Approach // CMST. – 2019. – Vol. 25, No. 2. – P. 61–70.

112. Gorbushin N., Eremeyev V., Mishuris G. On Stress Singularity near the Tip of a Crack with Surface Stresses // *International Journal of Engineering Science*. – 2020. – Vol. 146. – Art. 103183. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103183.
113. Karapetian E., Kachanov M. Green's Functions for the Isotropic or Transversely Isotropic Space Containing a Circular Crack // *Acta Mechanica*. – 1998. – Vol. 126. – P. 169–187. – DOI: 10.1007/BF01172806.
114. Fabrikant V. I. Interaction of Parallel Circular Cracks Subjected to Arbitrary Loading in Transversely Isotropic Elastic Space // *Applicable Analysis*. – 1997. – Vol. 66, No. 3–4. – P. 273–290. – DOI: 10.1080/00036819708840587.
115. Guerrero F., Sevostianov I., Giraud A. On a Possible Approximation of Changes in Elastic Properties of a Transversely Isotropic Material Due to an Arbitrarily Oriented Crack // *International Journal of Fracture*. – 2008. – Vol. 153. – P. 169–176. – DOI: 10.1007/s10704-009-9311-1.
116. Seyedkavoosi S., Vilchevskaya E., Sevostianov I. Randomly Oriented Cracks in a Transversely Isotropic Material // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 150. – P. 222–229.
117. Kravets' V. S., Savruk M. P. Two-Dimensional Periodic Problem of the Theory of Elasticity for an Isotropic Plane with Curvilinear Holes and Edge Cracks // *Materials Science*. – 2019. – Vol. 54. – P. 866–874. – DOI: 10.1007/s11003-019-00274-3.
118. Zureick A. H. The Asymmetric Displacement of a Rigid Spheroidal Inclusion Embedded in Transversely Isotropic Medium // *Acta Mechanica*. – 1989. – Vol. 77, No. 1–2. – P. 273–290.
119. Zhong Z. Analysis of a Transversely Isotropic Rod Containing a Single Cylindrical Inclusion with Axisymmetric Eigenstrains // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39, No. 23. – P. 5753–5765.
120. Карадій Т. С. Метод збурень у механіці пружних (в'язкопружних) анізотропних та композиційних матеріалів. – Дніпропетровськ : РІК НГА України, 1998. – 260 с.

121. Shporta, A. H., Kagadiy, T. S., Onopriienko, O. D. Study of the material properties influence and contact conditions on the stress-strain state during the interaction of a stamp and a plate // *Computer Science and Applied Mathematics*. – 2023. – No. 1. – P. 19–25. – DOI: [10.26661/2786-6254-2023-1-03](https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-1-03).

122. Stashchuk, M. G., Drobenko, B. D., Izra, Ye. M. Model of calculation of optimal annealing modes of functionally gradient bodies // *Materials Science*. – 2022. – Vol. 58, No. 4. – P. 446–452. – DOI: 10.1007/s11003-023-00683-5.

123. Drobenko, B. D., Kushnir, R. M., Marchuk, M. V. Methodology for exploration of the strength and determination of destructive load of rocket and space engineering constructions // *Science and Innovation*. – 2021. – Vol. 17, No. 2. – P. 28–36. – DOI: 10.15407/scine17.03.028.

124. Kurennov, S., Smetankina, N., Barakhov, K. Axisymmetric stress state of adhesive joint of a circular patch with a plate weakened by a circular cut-out // *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*. – 2023. – Vol. 67, No. 1. – P. 12–18. – DOI: 10.3311/PPME.18801.

125. Shypul, O., Kuznetsov, I. B., Tevzadze, H. S., Khodak, R. O. Дослідження тріщиностійкості деталі під дією термоімпульсного навантаження // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2017. – С. 67–72.

126. Ніколаєв О.Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних многозв'язних тіл. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фіз.-мат. наук. – Дніпропетровськ. – 1997. – 36 с.

127. Ніколаєв О. Г. Теореми додавання переміщень трансверсально-ізотропних канонічних тіл. – Харків : ХАІ, 1996. – 52 с. – Деп. в ДНТБ України 10.07.96, № 1569–Ук96.

128. Ніколаєв О. Г. Класи розв'язності методом Фур'є основних крайових задач теорії пружності в деяких просторових канонічних областях / Рук. деп. в ДНТБ України 23.10.96, №1977 – Ук 96. – 16 с.

129. Ніколаєв О. Г. Обґрунтування методу Фур'є в основних крайових задачах теорії пружності для деяких просторових канонічних областей // *Доповіді НАН України*. – 1998. – № 2. – С. 78–83.



130. Nikolaev A. G. Circular stamp on a transversely isotropic halfspace with a spheroidal cavity with the presence of adhesion // *International Applied Mechanics*. 1994. V. 30, issue 8. P. 48-53. DOI: 10.1007/BF00847232

131. Ніколаєв О. Г., Щербакова Ю. А. Базисність осесиметричних розв'язків системи рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного витягнутого сфероїда // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2011. – № 1(78). – С. 32–39.

132. Ніколаєв О. Г., Щербакова Ю. А. Кругова тріщина в трансверсально-ізотропному сфероїді під дією нормального навантаження // *Теоретична та прикладна механіка*. – 2003. – Вип. 38. – С. 9–14.

133. Ніколаєв О. Г., Щербакова Ю. А. Аналіз напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного сфероїда зі сфероїдальною порожниною // *Вісник Львівського університету. Серія: прикладна математика та інформатика*. – 2007. – Вип. 12. – С. 176–181.

134. Ніколаєв О. Г., Щербакова Ю. А. Апарат та застосування узагальненого методу Фур'є для трансверсально-ізотропних тіл, обмежених площиною та параболоїдом обертання // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – Т. 52, № 3. – С. 160–169.

135. Bohdanov V. L. Influence of Initial Stresses on the Stressed State of a Composite with a Periodic System of Parallel Coaxial Normal Tensile Cracks // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 186, No. 1. – P. 1–13.

136. Chaudhuri R. A. Three-Dimensional Asymptotic Stress Field in the Vicinity of the Circumference of a Penny Shaped Discontinuity // *International Journal of Solids and Structures*. – 2003. – Vol. 40, No. 13–14. – P. 3787–3805. – DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00017-9.

137. Fabrikant I., Karapetian E., Kalinin S. V. Interaction Between a Punch and an Arbitrary Crack or Inclusion in a Transversely Isotropic Half-Space // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. – 2018. – Vol. 69, No. 4. – DOI: 10.1007/s00033-017-0894-5.

138. Kaczyński A. On 3D Symmetrical Thermoelastic Anticrack Problems // *Archives of Mechanics*. – 2016. – Vol. 68, No. 2. – P. 99–112.

139. Kaczyński A., Monastyrsky B. The Thermoelastic Problem for a Penny-Shaped Anticrack with Heat Conductivity in a Transversely Isotropic Space // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 54, No. 2. – P. 593–600. – DOI: 10.15632/jtam-pl.54.2.593.

140. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. – Vol. 1. – New York : McGraw-Hill, 1953.

141. Ніколаєв О. Г., Проценко В. С. Узагальнений метод Фур'є у просторових задачах теорії пружності. – Харків : ХАІ, 2011. – 344 с.

142. Ніколаєв О. Г., Курєннов С. С. Термонапруження у просторі з періодично розташованими пружними кульовими включеннями // Проблеми машинобудування. – 2004. – № 1. – С. 35–48.

143. Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. – Cambridge : Cambridge University Press, 1931. – 500 p.